ZUR THEORIE

DER

GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

UND DER

PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

DIE LÖSUNGEN ALS FUNKTIONEN DER RANDWERTE UND DER PARAMETER.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT

VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT

DER

FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN.

AKAD. LANDW. BIBL.

Von

LEON LICHTENSTEIN
aus Warschau.

Tag der Promotion: 24. Juli 1909.

253

Referenten:

Prof. Dr. H. A. Schwarz.

Prof. Dr. F. Schottky.

Tipografia Matematica di Palermo, Piazza Regalmici, Vicolo Guccia, 6. (754·1300·5) 12-7-1909.

Meiner Frau.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41548904_0082

ZUR THEORIE DER GEWÖHNLICHEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN UND DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ZWEITER ORDNUNG.

DIE LÖSUNGEN ALS FUNKTIONEN DER RANDWERTE UND DER PARAMETER.

Von **Leon Lichtenstein** (Charlottenburg).

Estratto dal tomo XXVIII (2° sem. 1909) dei ***Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo.***
Adunanza dell'11 aprile 1909.

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der Abhängigkeit der Lösungen gewöhnlicher Differentialgleichungen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung von den End- oder Randwerten und den Parametern.

Nachdem Herr H. A. SCHWARZ in seiner Abhandlung zum siebzigsten Geburtstage von WEIERSTRASS [1]) die partielle Differentialgleichung $\Delta u + p(x, y)u = 0$ nach der Methode der successiven Approximationen behandelt hatte, ist dieses Verfahren von Herrn PICARD mit durchschlagendem Erfolge zur Integration der gewöhnlichen und der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen und des hyperbolischen Typus angewandt worden. Seit dem Erscheinen seiner beiden grundlegenden Abhandlungen in dem Journal de mathématiques [2]) ist dieses Verfahren Gegenstand einer langen Reihe von Arbeiten von Herrn PICARD selbst, von den Herren LINDELÖF, v. ESCHERICH, DINI, S. BERNSTEIN und anderen Mathematikern geworden. Herr NICOLETTI und Herr v. ESCHERICH zeigten, dass die unendlichen Reihen, die das Verfahren der successiven Approximationen für die Lösungen eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, \mu) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* [Acta Societatis Scientiarum Fennicae, t. XV (1885), S. 315-362]; *Gesammelte Mathematische Abhandlungen,* Bd. II, S. 223-269.

[2]) PICARD: *a) Mémoire sur la théorie des équations aux dérivées partielles et la méthode des approximations successives* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. IV, Bd. VI (1890), S. 145-210]; *b) Sur l'application des méthodes d'approximations successives à l'étude de certaines équations différentielles* [Ibid., Ser. IV, Bd. IX (1893), S. 217-271].

liefert, nach den Anfangswerten und nach dem Parameter μ gliedweise differentiiert werden dürfen. Sie leiteten daraus Sätze über die Abhängigkeit dieser Lösungen von den Anfangswerten und den Parametern her, die übrigens zum Teil schon früher von den Herren POINCARÉ, BENDIXSON, LINDELÖF auf anderem Wege gefunden worden waren. Herr NICOLETTI macht hierbei die Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f_i}{\partial y_k}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}(i, k = 1, \ldots, n)$ der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügen. Die Betrachtungen von Herrn v. ESCHERICH gelten allgemein, sind aber sehr umständlich und beweisen nicht, dass die durch gliedweise Differentiation der PICARD'schen Reihen entstehenden Entwicklungen in gleichem Grade konvergieren.

Betrachten wir eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \tag{1}$$

wo $f(x, y, \mu)$ eine der LIPSCHITZ'schen Bedingung $|f(x, y, \mu) - f(x, y_1, \mu)| < k|y - y_1|$ genügende Funktion bedeutet. Für die Lösung $y(x, \mu)$ dieser Differentialgleichung, die für $x = x_0$ den Wert y_0 erhält, gibt Herr PICARD folgende in einem gewissen Intervalle in gleichem Grade konvergente Reihe

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots, \tag{2}$$

$$\begin{cases} y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0, \mu)\, dx, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1, \mu)\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{3}$$

Setzt man in den Formeln (3) für $f(x, y, \mu)$ entsprechend $f_1(x, y, \mu)$, $f_2(x, y, \mu)$, ... wo $f_n(x, y, \mu)(n = 1, 2, \ldots)$ stetige Funktionen bedeuten, die mit wachsendem n gegen $f(x, y, \mu)$ in gleichem Grade konvergieren, bildet man also die Ausdrücke

$$\begin{cases} \bar{y}_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x, y_0, \mu)\, dx, \\ \bar{y}_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x, \bar{y}_1, \mu)\, dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases} \tag{4}$$

so konvergiert, wie in Kapitel I § 1 gezeigt wird, die unendliche Reihe

$$y_0 + (\bar{y}_1 - y_0) + (\bar{y}_2 - \bar{y}_1) + \cdots \tag{5}$$

in gleichem Grade und hat y zur Summe.

Es seien jetzt die partiellen Ableitungen f_y und f_μ vorhanden und stetig. Wendet man das modifizierte Verfahren der successiven Approximationen auf die Differentialgleichungen $\frac{dt}{dx} = f_y(x, y, \mu)t$, $\frac{du}{dx} = f_y(x, y, \mu)u + f_\mu(x, y, \mu)$ an, so ergeben sich

fast ohne jede Rechnung die Sätze von Herrn NICOLETTI und von Herrn v. ESCHERICH über die gliedweise Differentiation der PICARD'schen Reihen nach den Anfangswerten der Lösung und den Parametern, wobei aber auch die Konvergenz in gleichem Grade der gewonnenen Entwicklungen mitbewiesen wird. Nebenbei ergibt sich ein neuer Beweis für die Eindeutigkeit der Lösung von (1).

Die analogen Sätze gelten für die Lösungen der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y, y', \mu),$$

wenn der Anfangs- und der Endwert vorgeschrieben sind, sowie für die Lösungen der partiellen Differentialgleichungen

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right), \tag{6}$$

$$\Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right), \tag{7}$$

wenn die Randwerte vorgegeben sind.

Es sei C ein von *einer* analytischen Linie [3]) begrenztes Gebiet. F sei für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von C und für alle

$$z, \quad u = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \mu,$$

die den Ungleichheitsbedingungen

$$|z| \leqq L, \quad |u| \leqq L', \quad |v| \leqq L'; \quad |\mu - \mu_0| \leqq c \tag{8}$$

genügen, stetig und besitze stetige partielle Ableitungen F_x, F_y, F_z, F_u, F_v. Gesucht wird eine Lösung der Differentialgleichung (7), die im Innern von C mit ihren partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung sich stetig verhält und am Rande eine vorgeschriebene stetige Folge von Werten annimmt.

Für lineare Differentialgleichungen beweist Herr PICARD [4]), dass die gesuchte Lösung existiert, wenn der Flächeninhalt des Gebietes hinreichend klein ist und die Randwerte, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen haben. Die gesuchte Lösung kann nach dem Verfahren der successiven Approximationen ermittelt werden.

Dieses Verfahren gelingt nach Herrn DINI [5]) auch dann schon, wenn die Randwerte stetig sind und stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung haben [6]).

---

3) Diese Beschränkung ist nicht notwendig [Vgl. die Fussnote [27])].

4) *Sur la détermination des intégrales de certaines équations linéaires du second ordre par leurs valeurs sur un contour fermé* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. V, Bd. VI (1900), S. 129-140].

5) *Sur la méthode des approximations successives pour les équations aux dérivées partielles du deuxième ordre* [Acta Mathematica, Bd. XXV (1902), S. 185-230].

6) Wie ich in einer im Erscheinen begriffenen Arbeit nachgewiesen habe, ist auch diese Einschränkung überflüssig. Die Lösung existiert stets auch dann schon, wenn die vorgeschriebenen Randwerte einfach stetig sind.

Ist die Differentialgleichung (7) nicht linear, so liefert zwar die Methode der successiven Approximationen immer noch eine Funktion z, die sich mit ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ in C stetig verhält und die vorgeschriebenen Randwerte annimmt, indessen scheinen hier die Methoden, deren sich die Herren PICARD und DINI bedienen, um nachzuweisen, dass die Reihen für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ gliedweise differentiierbar sind, nicht zum Ziele zu führen. Dieser Nachweis gelingt, wie im Kapitel II § 3 gezeigt wird, wenn man die Voraussetzung hinzunimmt, dass F_x, F_y, F_z, F_u, F_v der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügen. Im Kapitel II § 5 werden einige Sätze über die Eindeutigkeit der Lösungen unter Zuhilfenahme einer wertvollen Bemerkung von Herrn PARAF bewiesen.

In speciellen Fällen sind diese Sätze von den Herren LE ROY, LÜTKEMEYER, HOLMGREN, S. BERNSTEIN [7]) ausgesprochen und bewiesen worden. Der allgemeine Satz scheint bis jetzt in der Literatur nicht vorzukommen, trotzdem sein Beweis überaus einfach ist. In der Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften findet sich unter Hinweis auf Herrn PICARD sogar die Bemerkung: «Bei einer nicht-linearen Differentialgleichung lässt sich im allgemeinen *nicht einmal für ein hinreichend kleines Gebiet* behaupten, dass es nur *eine* Lösung der Randwertaufgabe geben könne [8])». Bemerkenswert ist, dass es für die Eindeutigkeit der Lösung der Differentialgleichung (7) genügt, wenn die Randwerte einfach stetig sind und die Funktion $F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$ sich stetig verhält und die LIPSCHITZ'sche Bedingung erfüllt. Über den Charakter der Begrenzungskurven und das Verhalten der Funktionen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ am Rande werden keine beschränkende Voraussetzungen gemacht. Der Beweis der Existenz der Lösung gelingt dem gegenüber im allgemeinen nur unter weitgehenden beschränkenden Annahmen über die Gestalt des Gebietes und den Charakter der Randwerte.

Neu in dieser Arbeit sind voraussichtlich neben dem Existenzbeweise für die Lösung der Differentialgleichung $\Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$ das modifizierte Verfahren der successiven Approximationen, die Sätze über die gliedweise Differentiation der PICARD'schen Reihen in der Theorie der gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und der partiellen Differentialgleichungen des elliptischen und des hyperbolischen Typus und die Sätze über die Abhängigkeit der Lösungen von den Randwerten und den Parametern.

---

[7]) Meist unter der im allgemeinen nicht zulässigen Voraussetzung, dass die partiellen Ableitungen erster Ordnung der gesuchten Lösungen sich bei der Annäherung an den Rand stetig ändern.

[8]) Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften, II A 7 c, S. 522. Vergl. auch PICARD, l. c. [2]), *a*, S. 146.

KAPITEL I.

§ 1.

Betrachten wir eine Differentialgleichung erster Ordnung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

wo x und y reelle Variable bedeuten. $f(x, y)$ sei definiert für

$$\begin{cases} 0 \leqq x - x_0 \leqq a, \\ |y - y_0| \leqq b, \end{cases} \tag{2}$$

verhalte sich in diesem Gebiete stetig und genüge der LIPSCHITZ'schen Bedingung

$$|f(x, y) - f(x, y')| < k|y - y'|.$$

M sei Max $|f(x, y)|$ in dem Gebiete (2),

$$\rho = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Um die stetige Lösung von (1) zu bestimmen, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, verfährt Herrn PICARD [9]) wie folgt:

Er bildet für

$$0 \leqq x - x_0 \leqq \rho$$

die unendliche Reihe von Funktionen

$$\begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0)\, dx, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1)\, dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1})\, dx, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} \tag{3}$$

und beweist, dass

$$\lim_{n=\infty} y_n = y$$

die gesuchte Lösung von (1) ist.

Neben $f(x, y)$ betrachten wir jetzt eine unendliche Reihe stetiger Funktionen

$$f_n(x, y), \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

die in dem Rechteck (2) definiert sind und mit wachsendem n gegen $f(x, y)$ in gleichem

---

9) PICARD l. c. [2]), *a, b.* — PICARD, *Traité d'Analyse,* Bd. II (1905), S. 301; Bd. III (1896), S. 88.

Grade konvergieren

$$(4)\qquad \begin{cases} |f(x,\ y) - f_n(x,\ y)| < \varepsilon_{n-1} & (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots), \\ \lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0. \end{cases}$$

Es sei N die obere Grenze der Werte

$$|f_n(x,\ y)|$$

im Gebiete (2).

Wir bilden die Ausdrücke:

$$(5)\qquad \begin{cases} y_0 = y_0, \\ y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_1(x,\ y_0)\,dx, \\ y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_2(x,\ y_1)\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n = y_0 + \int_{x_0}^{x} f_n(x,\ y_{n-1})\,dx, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\text{für}\quad 0 \leqq x - x_0 \leqq \rho^*$$

$$\rho^* = \operatorname{Min}\left(a,\ \frac{b}{N}\right).$$

Ist y diejenige stetige Lösung der Differentialgleichung (1), die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt, so wird nunmehr behauptet:

$$\lim_{n=\infty} y_n = y, \quad \lim_{n=\infty} \frac{dy_n}{dx} = \frac{dy}{dx}.$$

Beweis: Wir bemerken vor allem, dass für alle n

$$|y_n - y_0| \leqq b$$

ist. Die Argumente der Funktionen f_n treten aus dem Gebiete, indem diese Funktionen definiert sind, nicht heraus.

Wir nehmen eine unendliche Folge positiver, gegen Null konvergierender Zahlen

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 > \cdots$$

$$\lim_{n=\infty} \delta_n = 0$$

an und betrachten die Differenz

$$y - y_{n+1} = \int_{x_0}^{x} f(x,\ y)\,dx - \int_{x_0}^{x} f_{n+1}(x,\ y_n)\,dx = \int_{x_0}^{x} [f(x,\ y) - f(x,\ y_n)]\,dx$$

$$+ \int_{x_0}^{x} [f(x,\ y_n) - f_{n+1}(x,\ y_n)]\,dx.$$

Es ist

$$(6)\quad \begin{cases} |y - y_{n+1}| < k\int_{x_0}^{x} |y - y_n|\,dx + \varepsilon_n(x - x_0) \\ \text{und analog} \\ |y - y_{n+2}| < k\int_{x_0}^{x} |y - y_{n+1}|\,dx + \varepsilon_{n+1}(x - x_0), \\ |y - y_{n+3}| < k\int_{x_0}^{x} |y - y_{n+2}|\,dx + \varepsilon_{n+2}(x - x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |y - y_{n+m}| < k\int_{x_0}^{x} |y - y_{n+m-1}|\,dx + \varepsilon_{n+m-1}(x - x_0). \end{cases}$$

Wir schreiben zur Abkürzung

$$\int_{x_0}^{x_0+\rho^*} |y - y_n|\,dx = A$$

und bemerken, dass dann für $0 \leqq x - x_0 \leqq \rho^*$

$$\int_{x_0}^{x} |y - y_n|\,dx \leqq A$$

ist.

Die successive Einsetzung ergibt:

$$(7)\quad \begin{cases} |y - y_{n+1}| < kA + \varepsilon_n(x - x_0), \\ |y - y_{n+2}| < k^2 A(x - x_0) + k\varepsilon_n\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \varepsilon_{n+1}(x - x_0), \\ |y - y_{n+3}| < k^3 A\frac{(x-x_0)^2}{2!} + k^2\varepsilon_n\frac{(x-x_0)^3}{3!} + k\varepsilon_{n+1}\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2!} + \varepsilon_{n+2}\cdot(x-x_0), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ |y - y_{n+m}| < k^m\cdot A\frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + k^{m-1}\varepsilon_n\frac{(x - x_0)^m}{m!} \\ \qquad + k^{m-2}\varepsilon_{n+1}\frac{(x - x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \cdots + \varepsilon_{n+m-1}\cdot(x - x_0). \end{cases}$$

Für hinreichend grosse n

$$n > \lambda$$

ist

$$\varepsilon_{n+\nu} < \delta \qquad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

und daher

$$(7^a)\quad \begin{cases} |y - y_{n+m}| < k^m A\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\delta}{k}\left\{k(x-x_0) + \frac{k^2(x-x_0)^2}{2!} + \dots + \frac{k^m(x-x_0)^m}{m!}\right\} \\ \qquad < k^m A\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\delta}{k}[e^{k(x-x_0)} - 1] \leqq k^m A\frac{(x-x_0)^{m-1}}{(m-1)!} + \frac{\delta}{k}[e^{ka} - 1] \\ \qquad \leqq Ak\frac{(ka)^{m-1}}{(m-1)!} + B\delta, \end{cases}$$

$$B = \frac{1}{k}[e^{ka} - 1].$$

Wir setzen

$$n + m = n_1$$

und wählen m so gross,

$$m > p,$$

dass

$$Ak\frac{(ka)^{m-1}}{(m-1)!} < B\delta$$

und

$$\varepsilon_{n_1+\nu} < \delta_1 \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

wird.

Wir finden für alle

$$n_1 = n + m > \lambda + p = \lambda_1$$
$$|y - y_{n_1}| = |y - y_{n+m}| < 2B\delta$$

und

$$A_1 = \int_{x_0}^{x_0+\rho^*} |y - y_{n_1}|dx < 2aB\delta.$$

Wenn wir dieselben Überlegungen für n_1 und $n_1 + m_1$ wiederholen, finden wir

$$|y - y_{n_1+m_1}| < A_1 k\frac{(ka)^{m_1-1}}{(m_1-1)!} + B\delta_1$$

und für

$$m_1 > p_1, \quad n_1 + m_1 = n_2, \quad n_2 > \lambda_1 + p_1 = \lambda_2$$
$$|y - y_{n_2}| < 2B\delta_1.$$

So geht man weiter und findet nacheinander

$$|y - y_{n_3}| < 2B\delta_2 \quad \text{für} \quad n_3 > \lambda_3,$$
$$|y - y_{n_4}| < 2B\delta_3 \quad \text{für} \quad n_4 > \lambda_4,$$

u. s. w.

Da nun

$$\lim_{l=\infty} \delta_l = 0$$

ist, so hat man schliesslich

$$\lim_{n=\infty} y_n = y.$$

Die Funktionen y_n konvergieren in gleichem Grade gegen y. Hieraus folgt aber ohne weiteres, dass auch die Funktionen $\frac{dy_n}{dx}$ gegen $\frac{dy}{dx}$ in gleichem Grade konvergieren.

Die unendlichen Reihen

$$y = y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(y_1 - y_0) + \frac{d}{dx}(y_2 - y_1) + \cdots$$

konvergieren in gleichem Grade für $0 \leq x - x_0 \leq \rho^*$.

Unsere Behauptung ist vollkommen bewiesen.

Unser Satz gilt unverändert für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung.

Sind f und $f_n (n = 1, 2, \ldots)$ stetige Funktionen eines Parameters μ und gelten die

Ungleichheitsbedingungen (4) für alle $|\mu - \mu_0| \leq c$, so konvergieren die zuletzt betrachteten unendlichen Reihen für

$$0 \leq x - x_0 \leq \rho^*, \qquad |\mu - \mu_0| \leq c$$

in gleichem Grade.

Man sieht leicht ein, dass es für $x_0 \leq x \leq \rho$ nur *eine* stetige Lösung der Differentialgleichung (1) gibt, die für $x = x_0$ den Wert y_0 annimmt. Es sei $Y(x)$ irgend eine Lösung, die die Forderungen der Aufgabe erfüllt. Wie wir zuletzt bewiesen hatten, ist

$$Y(x) = y_0 + (y_1 - y_0) + \cdots = y.$$

§ 2.

Wir kehren zu der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

zurück und betrachten diejenige ihrer stetigen Lösungen, die für $x = x_0$ den Wert y_0^* annimmt

$$y_0 - b < y_0 - \delta \leq y_0^* \leq y_0 + \delta < y_0 + b.$$

Das Verfahren der successiven Approximationen (3) liefert sie in der Gestalt der unendlichen Reihe

$$y(x, y_0^*) = y_0^* + (y_1 - y_0^*) + (y_2 - y_1) + \cdots, \tag{8}$$

die für

$$\begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + \rho', \\ y_0 - \delta \leq y_0^* \leq y_0 + \delta, \end{cases} \qquad \rho' = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b - \delta}{M}\right) \tag{9}$$

in gleichem Grade konvergiert. Zugleich ist

$$\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial x} = \frac{\partial y_0^*}{\partial x} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial x} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial x} + \cdots. \tag{10}$$

Auch diese Reihe konvergiert in gleichem Grade.

Wie man aus den Formeln (3) leicht sieht, sind die Glieder der Reihen (8) und (10) stetige Funktionen von x und y_0^*. Daher sind auch $y(x, y_0^*)$ und $\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial x}$ stetige Funktionen von x und y_0^*.

Ist in dem Rechteck (2)

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = f_y(x, y)$$

vorhanden und stetig, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}, \qquad \frac{\partial^2 y(x, y_0^*)}{\partial y_0^* \partial x} \tag{11}$$

und sind für alle Werte von x und y_0^* in (9) stetig [10]).

[10]) Vergl. z. B. E. LINDELÖF, *Démonstration de quelques théorèmes sur les équations différentielles* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, Ser. V, Bd. VI (1900), S. 423-441].

Die partiellen Ableitungen (11) *lassen sich durch die für alle Werte von* x *und* y_0^* *in* (9) *in gleichem Grade konvergenten Reihen*

$$(12)\qquad \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*} = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^*} + \cdots,$$

$$\frac{\partial^2 y(x, y_0^*)}{\partial y_0^* \partial x} = \frac{\partial^2 y_0^*}{\partial y_0^* \partial x} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^* \partial x} + \frac{\partial^2 (y_2 - y_1)}{\partial y_0^* \partial x} + \cdots$$

darstellen.

Die unendlichen Reihen (8) *und* (10), *die das Verfahren der successiven Approximationen liefert, lassen sich nach dem Anfangswert* y_0^* *gliedweise differentiieren.*

Diesen Satz hatte zuerst Herr NICOLETTI [11]) bewiesen. Er machte hierbei die Annahme, dass die Funktion $f_y(x, y)$ der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügt. Später hat Herr v. ESCHERICH [12]) die Konvergenz der Reihe

$$s = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^*} + \cdots$$

und die Gültigkeit der Beziehung $s = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}$ ohne jede beschränkende Voraussetzungen dargetan. Sein Beweis ist sehr umständlich und gilt für das Gebiet

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_1,$$

$$y_0 - \delta \leqq y_0^* \leqq y_0 + \delta,$$

$$\rho_1 = \operatorname{Min}\left(a, \frac{b - \delta}{M_1}\right), \qquad M_1 = \operatorname{Max}\left(f(x, y),\ f_y(x, y)\right) \text{ in } (2).$$

Im allgemeinen ist ρ_1 kleiner als ρ'. Ueberdies beweist Herr VON ESCHERICH nicht, dass die Reihe für s in gleichem Grade konvergiert.

Die im § 1 durchgeführten Betrachtungen geben nun ein Mittel, den Satz, um den es sich hier handelt, leicht zu beweisen.

Wir gehen von der Differentialgleichung

$$(13)\qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot z = f_y(x, y) \cdot z$$

aus und suchen diejenige ihrer stetigen Lösungen zu bestimmen, die für $x = x_0$ den Wert $z = 1$ annimmt. In $f_y(x, y)$ ist hierbei für y der Ausdruck $y(x, y_0^*)$ einzusetzen. $f_y(x, y)$ wird so eine stetige Funktion von x und y_0^* in (9). Die gesuchte Lösung z ist für alle x und y_0^* in (9) eine stetige Funktion dieser beiden Argumente.

Aus der Stetigkeit von $f_y(x, y)$ und dem Umstande, dass die Funktionen y_0^*, y_1, y_2, y_3, $\cdots$ gegen $y(x, y_0^*)$ in gleichem Grade konvergieren, folgt, dass auch die

---

[11]) *Sugli integrali delle equazioni differenziali ordinarie considerati come funzioni dei loro valori iniziali* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, Bd. IV (1895), 2. Semester, S. 316-324].

[12]) *Über Systeme von Differentialgleichungen der I. Ordnung* [Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Bd. CVIII (1899), Abtheilung II a., S. 621-676].

Funktionen

$$f_y(x, y_1), \quad f_y(x, y_2), \quad f_y(x, y_3), \ldots$$

gegen $f_y(x, y)$ in gleichem Grade konvergieren.

Wir lösen die Differentialgleichung (13) nach dem im § 1 auseinandergesetzten verallgemeinerten Verfahren der successiven Approximationen auf. Für die Funktion, die wir im § 1 mit $f_n(x, y)$ bezeichnet hatten, tritt jetzt die Funktion

$$f_y(x, y_{n-1})z$$

ein. Für

$$f_n(x, y_{n-1})$$

haben wir

$$f_y(x, y_{n-1})z_{n-1}$$

zu setzen.

Die successiven Approximationen sind:

$$z_0 = 1 = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*},$$

$$z_1 = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x, y_0^*) z_0 dx = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x, y_0^*) \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} dx = \frac{\partial}{\partial y_0^*}\left[y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(x, y_0^*) dx\right] = \frac{\partial y_1}{\partial y_0^*},$$

$$z_2 = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x, y_1) z_1 dx = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x, y_1) \frac{\partial y_1}{\partial y_0^*} dx = \frac{\partial}{\partial y_0^*}\left[y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1) dx\right] = \frac{\partial y_2}{\partial y_0^*},$$

$$z_3 = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x, y_2) z_2 dx = 1 + \int_{x_0}^{x} f_y(x, y_2) \frac{\partial y_2}{\partial y_0^*} dx = \frac{\partial}{\partial y_0^*}\left[y_0^* + \int_{x_0}^{x} f(x, y_2) dx\right] = \frac{\partial y_3}{\partial y_0^*},$$

. . . . . .

Der allgemeine Satz des § 1 gibt die Entwicklungen

$$z = z_0 + (z_1 - z_0) + (z_2 - z_1) + \cdots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z_0}{\partial x} + \frac{\partial (z_1 - z_0)}{\partial x} + \cdots$$

oder

$$z = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^*} + \cdots, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y_0^*}{\partial x \partial y_0^*} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0^*)}{\partial x \partial y_0^*} + \cdots.$$

Diese unendlichen Reihen konvergieren in gleichem Grade für

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho',$$
$$y_0 - \delta \leqq y_0^* \leqq y_0 + \delta,$$

können daher in bezug auf y_0^* gliedweise integriert werden.

Wir finden so

$$\int_{y_0}^{y_0^*} z\, dy_0^* = [y_0^* + (y_1 - y_0^*) + (y_2 - y_1) + \cdots]_{y_0}^{y_0^*} = y(x, y_0^*) - y(x, y_0)$$

und daher

$$z = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial^2 y(x, y_0^*)}{\partial x \partial y_0^*},$$

(12)
$$\frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*} = \frac{\partial y_0^*}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_1 - y_0^*)}{\partial y_0^*} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial y_0^*} + \cdots,$$
$$\frac{\partial^2 y(x, y_0^*)}{\partial x \partial y_0^*} = \frac{\partial^2 y_0^*}{\partial x \partial y_0^*} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0^*)}{\partial x \partial y_0^*} + \frac{\partial^2 (y_2 - y_1)}{\partial x \partial y_0^*} + \cdots.$$

Unsere Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

Wir erkennen zugleich, dass

$$\zeta = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*}$$

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial \zeta}{\partial x} = f_y(x, y)\zeta, \tag{13}$$

aus der durch Auflösung die Formel [13])

$$\zeta = \frac{\partial y(x, y_0^*)}{\partial y_0^*} = e^{\int_{x_0}^{x} f_y(x, y)dx} \tag{14}$$

folgt, Genüge leistet.

Der zuletzt bewiesene Satz gilt auch für Systeme von Differentialgleichungen erster Ordnung und kann in ähnlicher Weise bewiesen werden.

Herr VON ESCHERICH hat in seiner oben zitierten Arbeit auch Sätze über die wiederholte Differentiation der PICARD'schen Reihen (8) entwickelt. Auch diese Sätze lassen sich nach dem in diesem Abschnitt befolgten Verfahren leicht beweisen.

In analoger Weise lässt sich ein Satz über Differentialgleichungen, die von einem Parameter abhängen, ableiten.

Betrachten wir die Differentialgleichung

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x, y, \mu). \tag{15}$$

$f(x, y, \mu)$ sei definiert für

$$\begin{aligned} x_0 \leqq x \leqq x_0 + a, \\ |y - y_0| \leqq b, \\ |\mu - \mu_0| \leqq c, \end{aligned} \tag{16}$$

verhalte sich in diesem Gebiete stetig und genüge der LIPSCHITZ'schen Bedingung.

Wir bezeichnen diejenige stetige Lösung der Differentialgleichung (15), die dem Werte μ des Parameters entspricht und für $x = x_0$ gleich y_0 wird, mit $y(x, \mu)$.

Es sei wieder $M = \text{Max}\,|f(x, y, \mu)|$ im Gebiete (16),

$$\rho = \text{Min}\left(a, \frac{b}{M}\right).$$

Das Verfahren der successiven Annäherungen (3) liefert für diese Lösung und ihren ersten Differentialquotienten für

$$\begin{cases} x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho, \\ |\mu - \mu_0| \leqq c \end{cases} \tag{17}$$

die in gleichem Grade konvergenten unendlichen Reihen

$$\begin{cases} y(x, \mu) = y_0 + (y_1 - y_0) + (y_2 - y_1) + \cdots, \\ \dfrac{\partial y(x, \mu)}{\partial x} = \dfrac{\partial y_0}{\partial x} + \dfrac{\partial (y_1 - y_0)}{\partial x} + \dfrac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial x} + \cdots \end{cases} \tag{18}$$

[13]) Diese Formel findet sich in den Arbeiten der Herren PEANO und BENDIXSON.

$y_0, y_1, y_2, \ldots$ sind, wie aus dem Bildungsgesetz (3) ersichtlich ist, stetige Funktionen von x und μ. Die Reihen (18) konvergieren in gleichem Grade. Daher sind $y(x, \mu)$ und $\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial x}$ stetige Funktionen von x und μ in (17).

Sind in dem Gebiete (16)

$$f_y(x, y, \mu) = \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial y}$$

und

$$f_\mu(x, y, \mu) = \frac{\partial f(x, y, \mu)}{\partial \mu}$$

vorhanden und stetig, so existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 y(x, \mu)}{\partial x \partial \mu},$$

sind für alle Werte von x und μ in (17) *stetig* [14]) *und lassen sich in die in gleichem Grade konvergenten Reihen*

$$(19) \qquad \begin{cases} \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial y_0}{\partial \mu} + \frac{\partial (y_1 - y_0)}{\partial \mu} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial \mu} + \cdots, \\ \frac{\partial^2 y(x, \mu)}{\partial x \partial \mu} = \frac{\partial^2 y_0}{\partial x \partial \mu} + \frac{\partial^2 (y_1 - y_0)}{\partial x \partial \mu} + \cdots \end{cases}$$

entwickeln [15]).

Die unendlichen Reihen (18) *lassen sich nach dem Parameter der Differentialgleichung gliedweise differentiieren.*

Zum Beweise hat man von der Differentialgleichung

$$(20) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = f_y(x, y, \mu) z + f_\mu(x, y, \mu)$$

auszugehen und diejenige ihrer stetigen Lösungen nach dem verallgemeinerten Verfahren der successiven Approximationen darzustellen, die für $x = x_0$ den Wert $z_0 = 0$ annimmt.

Für die Funktionen, die wir im § 1 mit $f_n(x, y)$ bezeichnet hatten, tritt jetzt die Funktion

$$f_y\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big) z + f_\mu\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big)$$

ein.

Für $f_n(x, y_{n-1})$ haben wir

$$f_y\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big) z_{n-1} + f_\mu\big(x, y_{n-1}(x, \mu), \mu\big)$$

zu setzen.

Wir erkennen so zugleich, dass

$$z = \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$$

---

[14]) Vergl. z. B. E. LINDELÖF, l. c. [10]).

[15]) Vergl. v. ESCHERICH, l. c. [12]). Herr v. ESCHERICH beweist übrigens nur, dass die Reihe (19) konvergiert und die Summe $\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu}$ hat.

der Differentialgleichung

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_y(x, y, \mu) z + f_\mu(x, y, \mu) \tag{20}$$

Genüge leistet [16]).

Aus (20) folgt durch Auflösung

$$z = \frac{\partial y(x, \mu)}{\partial \mu} = e^{\int_{x_0}^{x} f_y dx} \cdot \int_{x_0}^{x} f_\mu \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} f_y dx} dx. \tag{21}$$

Diese Formel ist der früher abgeleiteten Formel (14) analog. Wir machen jetzt noch eine Bemerkung. Die PICARD'schen Reihen konvergieren sicher für $0 \leqq x - x_0 \leqq \rho$. Ist $\frac{b}{M} < a$, so können sie noch darüber hinaus in gleichem Grade konvergieren. Dies treffe für

$$\begin{cases} 0 \leqq x - x_0 \leqq r > \rho, \\ r \leqq a, \\ |\mu - \mu_0| \leqq c_1 \leqq c \end{cases} \tag{22}$$

zu.

Man überzeugt sich leicht durch Wiederholung des Beweisverfahrens, dass die Sätze über die gliedweise Differentiation der Reihen (18) und die Existenz der in Bezug auf y_0 und μ genommenen partiellen Ableitungen in dem ganzen Gebiete (22) gelten.

§ 3.

In dem dritten Bande seines Lehrbuches der Analysis [17]) beweist Herr PICARD folgenden wichtigen Satz:

Gegeben sei eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$y'' = f(x, y, y', \mu), \tag{23}$$

wo $f(x, y, y', \mu)$ eine in dem Gebiete

$$\begin{cases} 0 \leqq x \leqq b, \\ |y| \leqq L, \\ |y'| \leqq L', \quad |\mu - \mu_0| \leqq c \end{cases} \tag{24}$$

definierte stetige reelle Funktion der reellen Veränderlichen x, y, y', μ bedeutet.

Es sei ferner für alle im Gebiete (24) enthaltenen Werte von x, y, y', y_1, y_1', μ

$$|f(x, y, y', \mu) - f(x, y_1, y_1', \mu)| < \alpha |y - y_1| + \beta |y' - y_1'|, \tag{25}$$

$$M = \operatorname{Max} |f(x, y, y', \mu)|.$$

---

[16]) Vergl. z. B. E. LINDELÖF, l. c. [10]).

[17]) PICARD, *Traité d'Analyse*, Bd. III (1896), S. 94-100. — Vergl. auch PICARD, l. c. [2]) *a*, S. 197-210; *b*, S. 229-236.

b und B mögen zwei Grössen bedeuten, die folgenden Ungleichheitsbedingungen genügen:

$$(26)\qquad \begin{cases} |B| \leq L, \\ \dfrac{M b^2}{8} + |B| \leq L, \\ \dfrac{M b}{2} + \left|\dfrac{B}{b}\right| \leq L', \\ \dfrac{\alpha b^2}{8} + \beta \dfrac{b}{2} < 1. \end{cases}$$

Diese Ungleichheitsbedingungen lassen sich stets erfüllen, wenn b, B, $\left|\dfrac{B}{b}\right|$ hinreichend klein sind.

Es gibt stets eine und nur eine Lösung der Differentialgleichung (23), die mit ihrer ersten Ableitung sich in dem Intervalle $0 \leq x \leq a$ stetig verhält, für $x = 0$ den Wert 0, für $x = b$ den Wert B annimmt. Diese Lösung und ihre Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung lassen sich in der Form der in gleichem Grade konvergenten unendlichen Reihen

$$(27)\qquad \begin{cases} y = y_1 + (y_2 - y_1) + (y_3 - y_2) + \cdots, \quad \dfrac{dy}{dx} = y_1' + (y_2' - y_1') + (y_3' - y_2') + \cdots, \\ \dfrac{d^2 y}{dx^2} = y_1'' + (y_2'' - y_1'') + \cdots \end{cases}$$

darstellen, worin

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \cdots$$

diejenigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$(28)\qquad \begin{cases} y_1'' = f(x, y_0, y_0', \mu), \\ y_2'' = f(x, y_1, y_1', \mu), \\ y_3'' = f(x, y_2, y_2', \mu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n'' = f(x, y_{n-1}, y_{n-1}', \mu), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

bedeuten, die mit ihren ersten Ableitungen für $0 \leq x \leq a$ stetig sind, für $x = 0$ den Wert 0, für $x = b$ den Wert B annehmen. y_0 ist eine beliebige stetige Funktion mit stetiger Ableitung,

$$|y_0| \leq L, \quad |y_0'| \leq L'.$$

Das von Herrn Picard *eingeschlagene Verfahren führt auch dann noch zum Ziele, wenn in den Gleichungen* (28) *für* $f(x, y, y', \mu)$ *stetige Funktionen eingesetzt werden, die gegen* $f(x, y, y', \mu)$ *in gleichem Grade konvergieren.* Dieser Satz ist dem im § 1 gegebenen Satze über Differentialgleichungen erster Ordnung an die Seite zu stellen; er gestattet wie dort Sätze über gliedweise Differentiation der Reihen (27) nach dem Anfangs- und dem Endwerte der Lösung und nach dem Parameter der Differentialgleichung und im Zusammenhange damit Sätze über die Differentiation der Lösung der Differentialgleichung (23) selbst nach den Endwerten und dem Parameter abzuleiten.

Der Beweis ist wie im § 1 zu führen.

Wir nehmen jetzt an, dass die partiellen Ableitungen

$$f_y,\quad f_{y'},\quad f_\mu \tag{29}$$

existieren und sich stetig verhalten.

Wie aus dem Bildungsgesetze ersichtlich ist, sind die Glieder der Reihen (27) stetige Funktionen von x und μ. Die Funktionen $y(x, \mu)$, $\frac{\partial y(x, \mu)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 y(x, \mu)}{\partial x^2}$ sind daher ebenfalls stetige Funktionen von x und μ.

Die Lösung $y(x, \mu)$ besitzt für

$$0 \leqq x \leqq b, \qquad |\mu - \mu_0| \leqq c \tag{30}$$

stetige partielle Ableitungen

$$\frac{\partial y}{\partial \mu},\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \mu},\qquad \frac{\partial^3 y}{\partial x^2\,\partial \mu}. \tag{31}$$

Die Ableitung

$$t = \frac{\partial y}{\partial \mu}$$

genügt der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x^2} = f_{y'}(x, y, y', \mu)\frac{\partial t}{\partial x} + f_y(x, y, y', \mu)t + f_\mu(x, y, y', \mu) \tag{32}$$

und kann durch die für alle Werte von x und μ in (30) in gleichem Grade konvergente Reihe

$$\frac{\partial y}{\partial \mu} = \frac{\partial y_1}{\partial \mu} + \frac{\partial (y_2 - y_1)}{\partial \mu} + \frac{\partial (y - y_2)}{\partial \mu} + \cdots \tag{33}$$

dargestellt werden.

Gleichzeitig gelten die Beziehungen

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 y}{\partial x\,\partial \mu} = \dfrac{\partial^2 y_1}{\partial x\,\partial \mu} + \dfrac{\partial^2 (y_2 - y_1)}{\partial x\,\partial \mu} + \cdots, \\ \dfrac{\partial^3 y}{\partial x^2\,\partial \mu} = \dfrac{\partial^3 y_1}{\partial x^2\,\partial \mu} + \dfrac{\partial^3 (y_2 - y_1)}{\partial x^2\,\partial \mu} + \cdots. \end{cases} \tag{34}$$

Auch diese Reihen konvergieren in gleichem Grade für x und μ in (30). Die PICARD*'schen Reihen (27) lassen sich in Bezug auf den Parameter der Differentialgleichung gliedweise differentiieren* [18]).

Der Beweis ist dem im § 2 gegebenen ganz analog.

---

[18]) Herr PICARD beweist folgenden Satz: Ist $f(x, y, y', \mu)$ stetige Funktion von x und analytische Funktion von y, y' und μ, so ist die in diesem Abschnitt betrachtete Lösung der Differentialgleichung $y'' = f(x, y, y', \mu)$ analytische Funktion von μ. Vergl. PICARD, *Sur les équations différentielles renfermant un paramètre arbitraire* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), Bd. CXVIII (1. Semester 1894), S. 760-764] und *Traité d'Analyse*, Bd. III (Paris, Gauthier-Villars, 1896), S. 164.

Man hat von der Differentialgleichung

$$(32)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 t}{\partial x^2} = f_{y'}\big(x,\ y(x,\ \mu),\ y'(x,\ \mu),\ \mu\big)\dfrac{\partial t}{\partial x} + f_y\big(x,\ y(x,\ \mu),\ y'(x,\ \mu),\ \mu\big)\,t \\ \qquad\qquad + f_\mu\big(x,\ y(x,\ \mu),\ y'(x,\ \mu),\ \mu\big) \end{cases}$$

auszugehen und diejenige ihrer Lösungen nach dem verallgemeinerten Verfahren der successiven Approximationen zu bestimmen, die sich mit ihrer ersten Ableitung für $0 \leqq x \leqq b$ stetig verhält und für $x = 0$ und $x = b$ verschwindet.

Die beiden Sätze dieses Paragraphen lassen sich ohne Aenderung auf Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausdehnen. Ebenso lassen sich Sätze über die Differentiation der Lösung nach ihren Endwerten, die den im § 2 bewiesenen Sätzen analog sind, ableiten.

§ 4.

Das im § 1 und 2 dargestellte Verfahren lässt sich auf die partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung des hyperbolischen Typus

$$(35)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \mu\right)$$

übertragen. x, y, z, μ sind reelle Variable.

$$F(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ \mu)$$

ist eine in dem Gebiete

$$(36)\quad \begin{cases} x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha, \\ y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta, \\ |z| \leqq a, \quad |u| \leqq b, \quad |v| \leqq b, \quad |\mu - \mu_0| \leqq c \end{cases}$$

stetige reelle Funktion ihrer sechs Argumente.

Für alle x, y, z, z_1, u, u_1, v, v_1, μ in (36) besteht die Beziehung

$$(37)\quad |F(x,\ y,\ z,\ u,\ v,\ \mu) - F(x,\ y,\ z_1,\ u_1,\ v_1,\ \mu)| < k\,.\,\{|z - z_1| + |u - u_1| + |v - v_1|\}.$$

Es sei

$$M = \operatorname{Max}|F| \quad \text{in (36)}, \quad \rho = \operatorname{Min}\left(\alpha,\ \frac{b}{M}\right), \qquad \rho' = \operatorname{Min}\left(\beta,\ \frac{b}{M}\right).$$

Wie Herr Picard zuerst gezeigt hatte, gibt es stets eine Lösung z der Differentialgleichung (35), die für $x = x_0$ und $y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho'$ sowie $y = y_0$ und $x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho$ verschwindet und im Innern und auf dem Rande des von den Geraden

$$x = x_0, \quad x = x_0 + \rho, \quad y = y_0, \quad y = y_0 + \rho'$$

und der Hyperbel

$$(39)\quad (x - x_0)(y - y_0) = \frac{a}{M}$$

begrenzten Gebietes D sich mit ihren Differentialquotienten

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$

stetig verhält.

Herr PICARD verfährt so [19]). Er löst nacheinander die Differentialgleichungen

$$(40) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = F(x, y, 0, 0, 0, \mu), \\ \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

den Grenzbedingungen

$$z_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für alle (x_0, y) und (y_0, x) gemäss auf und beweist, dass die Reihen

$$(41) \qquad \begin{cases} z = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial x} + \cdots \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial y} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} + \dfrac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial x \partial y} + \cdots \end{cases}$$

in gleichem Grade konvergieren.

z ist die gesuchte Lösung der Differentialgleichung (35). Um die Konvergenz der Reihen (41) nachzuweisen, führt Herr PICARD eine Vergleichsfunktion ein. Denselben Zweck kann man, wie Herr MASON [20]) zeigte, durch eine Abschätzung des Ausdruckes

$$|z_{n+1} - z_n| + \left|\frac{\partial (z_{n+1} - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial (z_{n+1} - z_n)}{\partial y}\right|$$

erreichen.

Neben der Funktion $F(x, y, z, u, v, \mu)$ betrachten wir jetzt eine unendliche Reihe stetiger Funktionen

$$(42) \qquad F_n(x, y, z, u, v, \mu) \ldots \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

die für alle x, y, z, u, v, μ im Gebiete (36) definiert sind und mit wachsendem n gegen $F(x, y, z, u, v, \mu)$ in gleichem Grade konvergieren.

Es sei

$$|F(x, y, z, u, v, \mu) - F_n(x, y, z, u, v, \mu)| < \varepsilon_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$\lim \varepsilon_n = 0.$$

Es sei N die obere Grenze der Werte $|F_n|$ in (36), z_0 eine stetige Funktion von x

[19]) Vergl. die Note I in G. DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, Bd. IV (1896), S. 353.

[20]) Vergl. M. MASON, *On the linear differential equation of hyperbolic type* [Mathematische Annalen, Bd. LXV (1908), S. 570-575].

und y, die für

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha \quad \text{und} \quad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta$$

stetige partielle Ableitungen erster Ordnung hat und den Ungleichheitsbedingungen

$$|z_0| \leqq a, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial x}\right| \leqq b, \qquad \left|\frac{\partial z_0}{\partial y}\right| \leqq b$$

genügt.

Wir lösen nacheinander die partiellen Differentialgleichungen

$$(43)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y} = F_1\left(x, y, z_0, \dfrac{\partial z_0}{\partial x}, \dfrac{\partial z_0}{\partial y}, \mu\right), \\ \dfrac{\partial^2 z_2}{\partial x \partial y} = F_2\left(x, y, z_1, \dfrac{\partial z_1}{\partial x}, \dfrac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = F_n\left(x, y, z_{n-1}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \dfrac{\partial z_{n-1}}{\partial y}, \mu\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

den Grenzbedingungen

$$z_n = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

für

$$x = x_0, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho_1'$$

und

$$y = y_0, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho_1$$

gemäss auf.

Hierin ist

$$\rho_1 = \operatorname{Min}\left(\alpha, \frac{b}{N}\right), \qquad \rho_1' = \operatorname{Min}\left(\beta, \frac{b}{N}\right).$$

Wir bezeichnen mit D_1 das von den Geraden $x = x_0$, $x = x_0 + \rho_1$, $y = y_0$, $y = y_0 + \rho_1'$ und der Hyperbel $(x - x_0)(y - y_0) = \dfrac{a}{N}$ begrenzte Gebiet. D_1 ist in D enthalten. Man überzeugt sich leicht, dass für alle (x, y) in D_1

$$|z_n| < a, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < b, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < b$$

ist. Die Argumente von F_n verlassen das Gebiet (36) nicht.

Es wird nunmehr behauptet, dass für $n = \infty$

$$(44)\quad \begin{cases} \lim z_n = z, & \lim \dfrac{\partial z_n}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \\ \lim \dfrac{\partial z_n}{\partial y} = \dfrac{\partial z}{\partial y}, & \lim \dfrac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}. \end{cases}$$

Die Funktionen

$$z_n, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z_n}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y}$$

nähern sich ihren Grenzwerten für alle x, y in D_1 in gleichem Grade.

Wir nehmen eine unendliche Reihe positiver, gegen Null konvergierender Zahlen

$$\delta > \delta_1 > \delta_2 > \cdots, \qquad \lim \delta_n = 0$$

an, wählen λ so gross, dass für

$$n > \lambda, \qquad \varepsilon_{n+\nu} < \delta \qquad (\nu = 1, 2, \ldots)$$

wird, und bilden den Ausdruck

$$|z - z_{n+1}| + \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial y}\right|.$$

Es ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2(z-z_{n+1})}{\partial x\,\partial y} &= F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right) - F_{n+1}\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)\\ &= F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)\\ &+ F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) - F_{n+1}\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)\end{aligned}$$

und daher

$$(45) \qquad \left|\frac{\partial^2(z - z_{n+1})}{\partial x\,\partial y}\right| < k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta.$$

Hieraus folgt, wenn wir zur Abkürzung

$$s_x(u) = \int_{x_0}^{x} u\,dx, \qquad s_y(u) = \int_{x_0}^{x} u\,dy, \qquad s_x^p s_y^q(u) = \int_{x_0}^{x} \cdots \int_{y_0}^{y} \cdots u(dx)^p (dy)^q$$

setzen,

$$(46) \quad \begin{cases} |z - z_{n+1}| < s_x s_y\left[k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta\right], \\ \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial x}\right| < s_y\left[k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta\right], \\ \left|\frac{\partial(z - z_{n+1})}{\partial y}\right| < s_x\left[k\left\{|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right|\right\} + \delta\right]. \end{cases}$$

Setzt man

$$|z - z_n| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial(z - z_n)}{\partial y}\right| = W_n,$$

so ergibt sich aus (46) leicht

$$\begin{aligned} W_{n+1} &< (s_x s_y + s_x + s_y)(k W_n + \delta), \\ W_{n+2} &< (s_x s_y + s_x + s_y)(k W_{n+1} + \delta), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

Die successive Einsetzung ergibt folgende symbolische Ungleichheitsbedingung:

$$(47) \quad \begin{cases} W_{n+m} < k^m (s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(W_n) \\ + \delta\{k^{m-1}(s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(1) + k^{m-2}(s_x s_y + s_x + s_y)^{(m-1)}(1) + \cdots \\ + k^2 (s_x s_y + s_x + s_y)^{(3)}(1) + k(s_x s_y + s_x + s_y)^{(2)}(1) + (s_x s_y + s_x + s_y)(1)\}, \end{cases}$$

oder, wenn der Höchstwert von W_n in D_1 mit A bezeichnet wird,

$$(48) \quad \begin{cases} W_{n+m} < k^m (s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(A) \\ + \delta\{(s_x s_y + s_x + s_y)(1) + k(s_x s_y + s_x + s_y)^{(2)}(1) + \cdots + k^{m-1}(s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(1)\}. \end{cases}$$

Das erste Glied rechterhand konvergiert mit wachsendem m in gleichem Grade gegen Null. Wie sich leicht zeigen lässt, ist z. B. für

$$m = 4p, \quad U_m = [k^m (s_x s_y + s_x + s_y)^{(m)}(A)] < A(kg^2)^m \frac{2^{\frac{m}{2}+5}}{\left[\left(\frac{m}{4}-1\right)!\right]^2 \left(\frac{m}{2}-1\right)!},$$

wo g eine feste Zahl grösser als α, β und 1 bedeutet. Da ferner $\lim_{m=\infty} \sqrt[m]{U_m} = 0$ ist, so konvergiert die unendliche Reihe

$$(49) \quad (s_x s_y + s_x + s_y)(1) + k(s_x s_y + s_x + s_y)^{(2)}(1) + k^2 (s_x s_y + s_x + s_y)^{(3)}(1) + \cdots$$

in gleichem Grade in dem ganzen Gebiete D_1.

Der Höchstwert ihrer Summe möge mit B bezeichnet werden. Da alle Glieder der Reihe (49) positiv sind, so können wir für (48) auch schreiben

$$(50) \qquad W_{n+m} < \gamma_m + \delta B,$$

wo γ_m eine mit wachsendem m gegen Null konvergierende Grösse bedeutet. Diese Ungleichheitsbedingung ist der Ungleichheitsbedingung (7^a) völlig analog. Wie dort, ziehen wir aus ihr den Schluss

$$\lim_{n=\infty} W_n = 0, \quad \text{d. h.} \quad \lim_{n=\infty} z_n = z, \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\partial z_n}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}, \ \lim_{n=\infty} \frac{\partial z_n}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Offenbar ist dann auch

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Alle hier betrachteten Funktionen nähern sich ihren Grenzwerten in gleichem Grade. Unsere Behauptung ist hiermit vollständig bewiesen.

Durch diese Betrachtungen ist, wie man leicht sieht, noch folgender wichtiger Satz bewiesen:

In dem Gebiete D gibt es nur eine den Ungleichheitsbedingungen

$$(51) \qquad |z| \leq a, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial x}\right| \leq b, \qquad \left|\frac{\partial z}{\partial y}\right| \leq b$$

genügende Funktion, die im Innern und an dem Rande sich mit ihren partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ *stetig verhält, die Differentialgleichung* (35) *erfüllt und für*

$$x = x_0, \qquad y_0 \leq y \leq y_0 + \rho' \qquad \textit{und} \qquad y = y_0, \qquad x_0 \leq x \leq x_0 + \rho$$

verschwindet.

Denn, ist $z'(x, y)$ irgend eine Lösung, die die Forderungen der Aufgabe erfüllt, so ist, wie wir zuletzt bewiesen haben,

$$z'(x, y) = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots = z(x, y).$$

Wie leicht ersichtlich ist, ist jedes Glied der Reihen (41) stetige Funktion von x, y, μ. Diese Reihen konvergieren in gleichem Grade. Die Funktionen

$$z(x, y, \mu), \qquad \frac{\partial z(x, y, \mu)}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z(x, y, \mu)}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z(x, y, \mu)}{\partial x \partial y}$$

sind stetige Funktionen ihrer 3 Argumente für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für $|\mu - \mu_0| \leqq c$.

LEHRSATZ. — *Sind für* x, y, z, u, v, μ *in* (36)

$$\frac{\partial F}{\partial z} = F_z, \qquad \frac{\partial F}{\partial u} = F_u, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = F_v, \qquad \frac{\partial F}{\partial \mu} = F_\mu$$

vorhanden und stetig, so lassen sich die Reihen (41) *nach* μ *gliedweise differentiieren. Die durch gliedweise Differentiation erhaltenen Reihen konvergieren für alle* x, y *im Innern und auf dem Rande von* D *und für* $|\mu - \mu_0| \leqq c$ *in gleichem Grade. Für alle diese Werte von* x, y, μ *sind die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial z}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial \mu}$$

vorhanden und stetig. Die Ableitung $t = \dfrac{\partial z}{\partial \mu}$ *genügt der Differentialgleichung*

$$\frac{\partial^2 t}{\partial x \partial y} = F_z . t + F_u \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + F_v \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu . \tag{52}$$

Wir gehen von der Differentialgleichung (52) aus. Es sei T diejenige Lösung von (52), die in allen Punkten

$$x = x_0, \qquad y_0 \leqq y \leqq y_0 + \rho' \qquad \text{und} \qquad y = y_0, \qquad x_0 \leqq x \leqq x_0 + \rho$$

verschwindet und im Innern und auf dem Rande von D sich mit ihren partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial T}{\partial x}$, $\dfrac{\partial T}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$ stetig verhält. Zur Bestimmung von T bedienen wir uns des am Anfang dieses Abschnittes auseinandergesetzten Verfahrens. Für die Funktion, die wir früher mit

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

bezeichnet hatten, tritt jetzt die Funktion

$$F_z . t + F_u \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + F_v \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu \tag{53}$$

ein.

Für

$$F_n\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

haben wir

$$F_z\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) t + F_u\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) \frac{\partial t}{\partial x}$$
$$+ F_v\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$

zu setzen. z_n bedeutet hier die nach (40) ermittelte n-te Approximation der Lösung z, also eine wohl bestimmte stetige Funktion von x, y und μ. Zur Abkürzung setzen wir

für den zuletzt hingeschriebenen Ausdruck einfach

$$F_{z,n}\cdot t + F_{u,n}\frac{\partial t}{\partial x} + F_{v,n}\frac{\partial t}{\partial y} + F_{\mu,n}. \tag{54}$$

Man überzeugt sich leicht, dass die Funktionen (54) für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für alle $|t|$, $\left|\frac{\partial t}{\partial x}\right|$, $\left|\frac{\partial t}{\partial y}\right|$ kleiner, als eine feste Zahl, mit wachsendem n gegen (53) in gleichem Grade konvergieren.

Wir nehmen $t_0 = \frac{\partial z_1}{\partial \mu}$ an und finden für die successiven Approximationen der Lösung T nach (43) die Formeln

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 t_1}{\partial x\,\partial y} = F_{z1}\cdot t_0 + F_{u1}\cdot\frac{\partial t_0}{\partial x} + F_{v1}\frac{\partial t_0}{\partial y} + F_{\mu 1},\\
&\frac{\partial^2 t_2}{\partial x\,\partial y} = F_{z2}\cdot t_1 + F_{u2}\frac{\partial t_1}{\partial x} + F_{v2}\frac{\partial t_1}{\partial y} + F_{\mu 2},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\frac{\partial^2 t_n}{\partial x\,\partial y} = F_{zn}\cdot t_{n-1} + F_{un}\frac{\partial t_{n-1}}{\partial x} + F_{vn}\frac{\partial t_{n-1}}{\partial y} + F_{\mu n}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right. \tag{55}$$

Hieraus ergibt sich durch Integration

$$\begin{aligned}
t_1 &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(F_{z1}\cdot\frac{\partial z_1}{\partial\mu} + F_{u1}\frac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial\mu} + F_{v1}\frac{\partial^2 z_1}{\partial y\,\partial\mu} + F_{\mu 1}\right)dx\,dy\\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, \mu\right)dx\,dy = \frac{\partial z_2}{\partial\mu},\\
t_2 &= \int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y}\left(F_{z2}\cdot\frac{\partial z_2}{\partial\mu} + F_{u2}\frac{\partial^2 z_2}{\partial\mu\,\partial x} + F_{v2}\frac{\partial^2 z_2}{\partial\mu\,\partial y} + F_{\mu 2}\right)dx\,dy\\
&= \frac{\partial}{\partial\mu}\int_{x_0}^{x}\int_{y_0}^{y} F\left(x, y, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, \mu\right)dx\,dy = \frac{\partial z_3}{\partial\mu}.
\end{aligned}$$

In gleicher Weise findet man

$$t_3 = \frac{\partial z_4}{\partial\mu}, \ldots, \qquad t_n = \frac{\partial z_{n+1}}{\partial\mu}, \ldots.$$

Nach dem allgemeinen Satze konvergieren die Entwicklungen

$$T = t_0 + (t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \cdots = \frac{\partial z_1}{\partial\mu} + \frac{\partial(z_2 - z_1)}{\partial\mu} + \frac{\partial(z_3 - z_2)}{\partial\mu} + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial t_0}{\partial x} + \frac{\partial(t_1 - t_0)}{\partial x} + \frac{\partial(t_2 - t_1)}{\partial x} + \cdots = \frac{\partial^2 z_1}{\partial\mu\,\partial x} + \frac{\partial^2(z_2 - z_1)}{\partial\mu\,\partial x} + \cdots$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial t_0}{\partial y} + \frac{\partial(t_1 - t_0)}{\partial y} + \frac{\partial(t_2 - t_1)}{\partial y} + \cdots = \frac{\partial^2 z_1}{\partial\mu\,\partial y} + \frac{\partial^2(z_2 - z_1)}{\partial\mu\,\partial y} + \cdots$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^3 z_1}{\partial\mu\,\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^3(z_2 - z_1)}{\partial\mu\,\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^3(z_3 - z_2)}{\partial\mu\,\partial x\,\partial y} + \cdots$$

in gleichem Grade für alle x, y im Innern und auf dem Rande von D und für $|\mu-\mu_0|\leqq c$. Sie können daher in Bezug auf μ gliedweise integriert werden. Wir finden so:

$$\int_{\mu_0}^{\mu} T\,d\mu = [z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots]_{\mu_0}^{\mu} = z(x, y, \mu) - z(x, y, \mu_0)$$

und folglich

$$(56)\qquad \begin{cases} T = \dfrac{\partial z}{\partial \mu} = \dfrac{\partial z_1}{\partial \mu} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial \mu} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial \mu} = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial \mu} + \dfrac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial x\,\partial \mu} + \cdots \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial \mu\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z_1}{\partial \mu\,\partial y} + \dfrac{\partial^2 (z_2 - z_1)}{\partial \mu\,\partial y} + \cdots \\ \dfrac{\partial^3 z}{\partial \mu\,\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^3 (z_1)}{\partial \mu\,\partial x\,\partial y} + \dfrac{\partial^3 (z_2 - z_1)}{\partial \mu\,\partial x\,\partial y} + \cdots . \end{cases}$$

Die unendlichen Reihen (56) konvergieren in gleichem Grade. Daher sind die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial \mu}, \ldots, \dfrac{\partial^3 z}{\partial \mu\,\partial x\,\partial y}$ stetig.

Unsere Behauptungen sind hiermit vollständig bewiesen. Wir haben die Randfunktionen $f(x)$ und $\psi(y)$ gleich Null vorausgesetzt. Den Fall, in welchem sie von Null verschieden sind, kann man durch passende Substitution auf den vorerwähnten zurückführen.

Wir betrachten zum Schluss die Differentialgleichung

$$(57)\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)$$

und suchen diejenige ihrer Lösungen $z(x, y, \mu)$ zu bestimmen, die sich mit ihren partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$ stetig verhält, für $x = x_0$ den Wert $\psi(y, \mu)$ und für $y = y_0$ den Wert $f(x, \mu)$ annimmt. $f(x_0, \mu) = \psi(y_0, \mu)$.

Wir setzen die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen

$$(58)\qquad \frac{\partial f}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial \mu},\ \frac{\partial \psi}{\partial y},\ \frac{\partial \psi}{\partial \mu},\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial \mu},\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial y\,\partial \mu},\ F_z,\ F_u,\ F_v$$

für alle Werte von x, y, μ, die den Ungleichheitsbedingungen

$$x_0 \leqq x \leqq x_0 + \alpha,$$
$$y_0 \leqq y \leqq y_0 + \beta,$$
$$|\mu - \mu_0| \leqq c$$

genügen, voraus und behaupten:

In einem gewissen Gebiete D_2 sind die partiellen Ableitungen

$$(59)\qquad \frac{\partial z}{\partial \mu},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial \mu},\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial \mu},\quad \frac{\partial^3 z}{\partial x\,\partial y\,\partial \mu}$$

vorhanden und stetig.

Setzt man nämlich

$$(60)\qquad z = f(x, \mu) + \psi(y, \mu) - f(x_0, \mu) + w,$$

so hat man zur Bestimmung von w die Differentialgleichung

$$(61)\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, f(x,\mu)+\psi(y,\mu)-f(x_0,\mu)+w, \dfrac{\partial f(x,\mu)}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial \psi(y,\mu)}{\partial y}+\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)\\ = \Psi\left(x, y, w, \dfrac{\partial w}{\partial x}, \dfrac{\partial w}{\partial y}, \mu\right).\end{cases}$$

Die Funktion Ψ erfüllt sämtliche Bedingungen, denen die Funktion

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

am Anfang dieses Abschnittes zu genügen hatte. Nach dem an jener Stelle bewiesenen Satze existieren die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial w}{\partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial \mu}, \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y \partial \mu}$$

und daher nach (60) auch die partiellen Ableitungen (59). Alle Funktionen (59) und (60) verhalten sich stetig.

KAPITEL II.

§ 1.

Wir gehen jetzt zur Betrachtung der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung des elliptischen Typus

$$(1) \qquad \Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right)$$

über und machen zunächst folgende einleitende Bemerkungen:

In der grundlegenden Abhandlung vom Jahre 1890 zeigt Herr PICARD [21]), ohne auf die Voraussetzungen, unter welchen seine Resultate gelten, näher einzugehen, dass, wenn der Flächeninhalt des Integrationsgebietes C hinreichend klein ist, die Differentialgleichung (1) eine Lösung besitzt, die im Innern von C mit ihren partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

sich stetig verhält [22]) und an der Begrenzung die vorgeschriebenen Randwerte annimmt. Diese Lösung kann nach dem Verfahren der successiven Approximationen ermittelt werden.

In einer Reihe späterer Veröffentlichungen behandelt Herr PICARD des näheren die Frage, unter welchen Bedingungen dieses Verfahren konvergiert, beschränkt sich

---

[21]) l. c. [2]) *a*.

[22]) Zur Vereinfachung sagen wir von einer solchen Lösung, sie genüge den Bedingungen (*P*).

aber ausschliesslich auf die Betrachtung der linearen Differentialgleichungen. In einer Arbeit im Journal de mathématiques [23]) spricht Herr PICARD folgenden Satz aus:

Es sei C ein von *einer* analytischen Linie S begrenztes Gebiet.

Die Koeffizienten a, b, c, h der Differentialgleichung

$$\Delta z = a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz + h \tag{2}$$

und ihre partiellen Ableitungen erster Ordnung sind in C und auf S stetige Funktionen von x und y. Sind die Randwerte, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetig und haben sie stetige Ableitungen der drei ersten Ordnungen, so konvergiert das Verfahren der successiven Approximationen, wenn der Flächeninhalt des Gebietes C hinreichend klein ist.

In einer späteren Abhandlung [24]) nimmt Herr PICARD noch specieller an, die Koeffizienten a, b, c, h seien analytische Funktionen von x und y. Alsdann ist jede den Bedingungen (P) genügende Lösung der Differentialgleichung (2) eine analytische Funktion von x und y.

In einem hinreichend kleinen von *einer* analytischen Linie begrenzten Gebiete C gibt es auch dann schon eine den Bedingungen (P) genügende Lösung z der Differentialgleichung (1), die am Rande vorgeschriebene Werte annimmt, wenn diese Werte einfach stetig sind.

Mit der Frage nach den hinreichenden Bedingungen für die Konvergenz des Verfahrens der successiven Approximationen hat sich ausser Herrn PICARD noch Herr DINI [25]) beschäftigt. Herr DINI untersucht die Differentialgleichung (2) in einem hinreichend kleinen, von *einer* analytischen Linie begrenzten Gebiete C und findet, dass es bereits genügt, wenn die vorgeschriebenen Randwerte stetig sind und stetige Ableitungen der ersten und der zweiten Ordnung haben [26]).

---

[23]) l. c. [4]).

[24]) PICARD, *Sur les équations linéaires aux dérivées partielles et la généralisation du problème de* DIRICHLET [Acta Mathematica, Bd. XXV (1902), S. 121-137]. Vergl. auch PICARD, *Sur la détermination des intégrales de certaines équations aux dérivées partielles du second ordre par leurs valeurs le long d'un contour fermé* [Journal de l'École Polytechnique, LX^{e} Cahier (1890), S. 89-105].

[25]) l. c. [5]).

[26]) Die Ergebnisse von Herrn DINI reichen übrigens weiter. Wir haben zuletzt angenommen, dass die Funktionen a, b, c, h stetige partielle Differentialquotienten erster Ordnung haben. Es genügt aber schon, wenn sie die «Normalbedingungen» erfüllen. Die Existenz der Ableitung zweiter Ordnung der Randwerte ist gleichfalls nicht erforderlich; sie kann durch gewisse Integrabilitätsbedingungen der Ableitung erster Ordnung ersetzt werden. Das Verfahren der successiven Approximationen gelingt in jedem «Normalgebiete», d. h. in jedem Gebiete, das durch gewisse Eigenschaften der in diesem Gebiete zu beliebigen stetigen Randwerten gehörigen Potentialfunktion charakterisiert ist. Allerdings beweist Herr DINI nur von dem Kreise, dass er ein Normalgebiet darstellt. Die Existenz der Ableitungen der Randwerte ist übrigens für die Existenz der Lösung der Differentialgleichung (2) nicht erforderlich. Die Lösung existiert stets dann schon, wenn die vorgeschriebenen Randwerte einfach stetig sind. Vergl. die Fussnote [6]).

Wir betrachten ein von *einer* analytischen Linie S [27]) begrenztes Gebiet C und suchen eine den Bedingungen (P) genügende Lösung der Differentialgleichung (1) zu bestimmen, die am Rande eine vorgeschriebene stetige Folge von Werten annimmt. Diese Werte sollen, als Funktion der Bogenlänge betrachtet, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben. Die Funktion $F(x, y, z, u, v, p)$ sei für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von C und für alle z, u, v, p, die den Ungleichheitsbedingungen

$$(3) \qquad |z| \leq L, \qquad |u| \leq L', \qquad |v| \leq L', \qquad |p - p_0| \leq c$$

genügen, stetig und besitze stetige partielle Ableitungen

$$F_x, \quad F_y, \quad F_z, \quad F_u, \quad F_v.$$

Man löse nacheinander die Differentialgleichungen

$$(4) \quad \begin{cases} \Delta z_1 = 0, \\ \Delta u_2 = \Delta(z_2 - z_1) = F\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, p\right), \\ \Delta u_3 = \Delta(z_3 - z_2) = F\left(x, y, z_2, \frac{\partial z_2}{\partial x}, \frac{\partial z_2}{\partial y}, p\right) - F\left(x, y, z_1, \frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, p\right) \end{cases}$$

den folgenden Grenzbedingungen gemäss auf: die Funktionen z_1, u_2, u_3, ... sollen den Bedigungen (P) genügen. z_1 nimmt am Rande die vorgeschriebenen Werte an, u_2, u_3, ... verschwinden am Rande. Da die Randwerte nach der Voraussetzung stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben, so sind die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z_1}{\partial x}$, $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ in C und auf S stetig [28]). Selbstverständlich müssen die Randwerte so gewählt sein, dass

$$|z_1| < L, \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial x}\right| < L', \qquad \left|\frac{\partial z_1}{\partial y}\right| < L'$$

wird. Es genügt hierzu, wenn die Randwerte und ihre zwei ersten Ableitungen dem absoluten Betrage nach bestimmte von C, L, L' abhängige Höchstwerte nicht übersteigen [29]). Man überzeugt sich leicht, dass die Funktionen $\frac{\partial u_n}{\partial x}$, $\frac{\partial u_n}{\partial y}$ sich überall in C und auf dem Rande von C stetig verhalten.

Ist $G(x, y; \xi, \eta)$ die zu dem gegebenen Gebiete gehörige GREEN'sche Funktion,

---

[27]) Auch diese Einschränkung ist nicht notwendig. Es genügt vielmehr, wenn die Begrenzung des Gebietes C aus stetig gekrümmten Kurven besteht.

[28]) Diesen Satz beweist Herr DINI durch die Betrachtung des POISSON'schen Integrales [l. c. [5]), S. 221 u. ff.]. Einen anderen sehr eleganten Beweis gibt Herr S. BERNSTEIN in der Abhandlung: *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre* [Mathematische Annalen, Bd. LIX (1904), S. 20-76], S. 23 u. ff., gestützt auf den Fundamentalsatz von Herrn DE LA VALLÉE POUSSIN über die FOURIER'schen Koeffizienten integrierbarer Funktionen.

[29]) Vergl. DINI, l. c. [5]), S. 221-229.

so findet man aus (4) zunächst rein formell

$$(5)\quad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta)\Big[F\Big(\xi, \eta, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}, \mu\Big) \\ \qquad\qquad - F\Big(\xi, \eta, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big] d\xi\, d\eta, \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial x} = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial G}{\partial x}\cdot\Big[F\Big(\xi, \eta, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}, \mu\Big) \\ \qquad\qquad - F\Big(\xi, \eta, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big] d\xi\, d\eta, \\ \frac{\partial u_{n+1}}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi}\int\int \frac{\partial G}{\partial y}\cdot\Big[F\Big(\xi, \eta, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}, \mu\Big) \\ \qquad\qquad - F\Big(\xi, \eta, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big] d\xi\, d\eta. \end{cases}$$

Da nun offenbar

$$(6)\quad \begin{cases} \Big|F\Big(\xi, \eta, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial \xi}, \frac{\partial z_n}{\partial \eta}, \mu\Big) - F\Big(\xi, \eta, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \xi}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial \eta}, \mu\Big)\Big| \\ \qquad < A_1|u_n| + A_2\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big| \end{cases}$$

ist, wo A_1, A_2, A_3 bestimmte Konstanten bedeuten, so hat man

$$(7)\quad \begin{cases} |u_{n+1}| < \frac{1}{2\pi}\int\int G.\Big\{A_1|u_n| + A_2\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big|\Big\} d\xi\, d\eta, \\ \Big|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial x}\Big| < \frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial x}\Big|\Big\{A_1|u_n| + A_2\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big|\Big\} d\xi\, d\eta, \\ \Big|\frac{\partial u_{n+1}}{\partial y}\Big| < \frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial y}\Big|\Big\{A_1|u_n| + A_2\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \xi}\Big| + A_3\Big|\frac{\partial u_n}{\partial \eta}\Big|\Big\} d\xi\, d\eta. \end{cases}$$

Ist nun H der Maximalwert von $|F(x, y, z, u, v, \mu)|$ für alle in Betracht kommenden Werte der Argumente, ist M die obere Grenze von

$$\frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta) d\xi\, d\eta,$$

N die obere Grenze von

$$\frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial x}\Big| d\xi\, d\eta$$

und

$$\frac{1}{2\pi}\int\int \Big|\frac{\partial G}{\partial y}\Big| d\xi\, d\eta$$

für alle (x, y) im Innern von C, so folgen aus (7) für alle (x, y) in C und auf S

die weiteren Ungleichheitsbedingungen

$$(8)\qquad \begin{cases} |u_n| < M(A_1 M + A_2 N + A_3 N)^{n-2} H, \\ \left|\dfrac{\partial u_n}{\partial x}\right| < N(A_1 M + A_2 N + A_3 N)^{n-2} H, \qquad n \geqq 2 \end{cases}$$

und die analogen Beziehungen für die Differentialquotienten in Bezug auf y.

Die Grössen M und N nehmen mit abnehmendem Flächeninhalt des Gebietes gegen Null ab. Dieser sei so klein, dass M und N den Ungleichheitsbedingungen

$$(9)\qquad \begin{cases} A_1 M + A_2 N + A_3 N < 1, \qquad \dfrac{MH}{1 - (A_1 M + A_2 N + A_3 N)} < L - \operatorname{Max} |z_1|, \\ \dfrac{NH}{1 - (A_1 M + A_2 N + A_3 N)} < L' - \operatorname{Max}\left(\left|\dfrac{\partial z_1}{\partial x}\right|, \left|\dfrac{\partial z_1}{\partial y}\right|\right) \end{cases}$$

genügen.

Aus den Relationen (8) und (9) folgen die weiteren Beziehungen

$$(9^a)\qquad |z_n| < L, \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial x}\right| < L', \qquad \left|\frac{\partial z_n}{\partial y}\right| < L'$$

für alle n.

Die Argumente der Funktion F verlassen nicht das Gebiet, in dem diese Funktion definiert war. Zugleich überzeugt man sich leicht, dass die unendlichen Reihen

$$(10)\qquad \begin{cases} z = z_1 + u_2 + u_3 + \cdots = z_1 + (z_2 - z_1) + (z_3 - z_2) + \cdots, \\ \dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x} + \cdots = \dfrac{\partial z_1}{\partial x} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial x} + \cdots, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial u_2}{\partial y} + \dfrac{\partial u_3}{\partial y} + \cdots = \dfrac{\partial z_1}{\partial y} + \dfrac{\partial (z_2 - z_1)}{\partial y} + \cdots \end{cases}$$

für alle (x, y) in C und auf S unbedingt und in gleichem Grade konvergieren. Man sieht ohne weiteres ein, dass z der Funktionalgleichung

$$(11)\qquad z = -\frac{1}{2\pi}\int\int F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \mu\right) G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta + z_1(x, y)$$

genügt und am Rande die vorgeschriebenen Werte annimmt.

Sind

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

im Innern von C vorhanden und stetig, so folgt aus (11) die weitere Beziehung

$$(1)\qquad \Delta z = F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \mu\right).$$

Ist $F(x, y, z, u, v, \mu)$ von u und v unabhängig, handelt es sich also um die Auflösung der Differentialgleichung $\Delta z = F(x, y, z, \mu)$, so folgt die Existenz und Stetigkeit der partiellen Ableitungen zweiter Ordnung direkt aus der Relation (11). In diesem Falle gelingt das Verfahren der successiven Approximationen schon, wenn die vorgeschriebenen Randwerte einfach stetig sind. Ist $F(x, y, z, u, v, \mu)$ eine

analytische Funktion ihrer ersten 5 Argumente, so genügt, wie Herr S. BERNSTEIN nachgewiesen hat, die Funktion $z = z_1 + (z_2 - z_1) + \cdots$ wirklich der Differentialgleichung (1). Im Innern von C ist z übrigens eine analytische Funktion von x und y [30]).

Für lineare Differentialgleichungen (2) führt Herr DINI den Beweis mit Hilfe eines vom ihm herrührenden Satzes über gliedweise Differentiation unendlicher Reihen.

Im allgemeinen Falle gelingt der Nachweis, dass z der Differentialgleichung (1) genügt und die Reihen für $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ gliedweise differentiierbar sind, wenn man die weitere Voraussetzung hinzunimmt, dass die Funktionen F_x, F_y, F_z, F_u, F_v der LIPSCHITZ'schen Bedingung genügen [31]). Es ist also z. B.

$$(12)\quad |F_x(x, y, z, u, v, \mu) - F_x(x, y, \bar{z}, \bar{u}, \bar{v}; \mu)| < A_4\{|z - \bar{z}| + |u - \bar{u}| + |v - \bar{v}|\}.$$

§ 2.

$f(x, y)$ sei in C und auf S stetig und besitze in C stetige partielle Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Betrachten wir das Integral

$$(13)\quad z = -\frac{1}{2\pi}\int\int G(x, y; \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta;\quad G(x, y; \xi, \eta) = -\log r + g(x, y; \xi, \eta),$$

wo x, y die Koordinaten eines Punktes im Innern von C bedeuten.

---

[30]) Vergl. S. BERNSTEIN, l. c. [28]).

[31]) Den an dieser Stelle gegebenen Beweis (Siehe § 3) habe ich in der Literatur nicht gefunden. Herr PICARD macht die zuletzt eingeführte beschränkende Voraussetzung nicht und sagt, dass der von ihm für lineare Differentialgleichungen gegebene Beweis [l. c. [4])], der übrigens die Existenz und Stetigkeit der dritten Ableitung der Randwerte voraussetzt, sich auf die allgemeine Differentialgleichung (1) direkt übertragen lässt [l. c. [2]) *a*, S. 164]. Mir ist diese Uebertragung ohne Hinzunahme der obigen weiteren Beschränkung nicht gelungen.

Es ist übrigens leicht einzusehen, dass der Übergang von der Gleichung (11) zu der Gleichung (1) jedesmal dann gestattet ist, wenn die Funktion F die LIPSCHITZ'sche Bedingung

$$|F(x_1, y_1, z_1, u_1, v_1, \mu) - F(x_2, y_2, z_2, u_2, v_2, \mu)| < \text{Const.}\{|x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| + |z_1 - z_2| + |u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|\}$$

erfüllt. In der Tat, folgt aus der Gleichung (11) nach einem bekannten Hülfssatze der Potentialtheorie (vergl. DINI, l. c. [5]), S. 192-196), dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ der HÖLDER'schen Bedingung genügen. Die Funktion $F\left(\xi, \eta, z, \frac{\partial z}{\partial \xi}, \frac{\partial z}{\partial \eta}, \mu\right)$ hat, als Funktion von ξ und η betrachtet, dieselbe Eigenschaft. Damit ist die soeben ausgesprochene Behauptung bewiesen. Ob die Reihen für $\frac{\partial z}{\partial x}$ und $\frac{\partial z}{\partial y}$ ohne Zuhülfenahme der Voraussetzung (12) gliedweise differentiierbar sind, ist noch unentschieden.

Nach einer Formel von Herrn DINI ist [32])

$$(14)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C\int [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\,d\xi\,d\eta \\ -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_C\int f(\xi,\eta)\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,d\xi\,d\eta - \frac{f(x,y)}{2\pi}\int_S \frac{\partial \log r}{\partial \xi}\cos\alpha\,ds. \end{cases}$$

Hierin bedeutet ds das Bogenelement der Begrenzungskurve von C, α den Winkel der Innennormale mit der X-Achse.

Es sei C'' ein Gebiet ganz im Innern von C, C''' ein Gebiet im Innern von C''. Ihre Begrenzungskurven bezeichnen wir mit S, S'', S'''. Die Entfernung der Kurven S'' und S''' sei r^*. Es sei (x, y) ein Punkt in C''' oder auf S'''. Um (x, y) beschreiben wir einen Kreis C'. Seinen Halbmesser bezeichnen wir mit r_0 und wählen $r_0 < r^*$. Es ist dann

$$(15)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_C\int [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\,d\xi\,d\eta = \int_{C'}\int + \int_{C-C'}\int \\ = -\displaystyle\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} \frac{f(\xi,\eta)-f(x,y)}{r}\cos 2\varphi\,dr\,d\varphi + \int_{C-C'}\int [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\,d\xi\,d\eta. \end{cases}$$

Ist $\operatorname{Max}\left(\left|\dfrac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \xi}\right|, \left|\dfrac{\partial f(\xi,\eta)}{\partial \eta}\right|\right)$ in C'' und auf S'' gleich K_1, $\operatorname{Max}|f(\xi,\eta)|$ in C gleich K, so findet man aus (15)

$$\left|\int_C\int [f(\xi,\eta)-f(x,y)]\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\,d\xi\,d\eta\right|$$

$$< 2K_1\int_0^{r_0}\int_0^{2\pi} |\cos 2\varphi|\,dr\,d\varphi + 2K\int_{C-C'}\int \left|\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\right| d\xi\,d\eta$$

$$= 8K_1 r_0 + 2K\int_{C-C'}\int \left|\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\right| d\xi\,d\eta.$$

Die Formel (14) gibt daher

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| < \frac{4r_0K_1}{\pi} + K\left\{\frac{1}{\pi}\int_{C-C'}\int \left|\frac{\partial^2 \log r}{\partial \xi^2}\right| d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi}\int_C\int \left|\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\right| d\xi\,d\eta + \frac{1}{2\pi}\left|\int_S \frac{\partial \log r}{\partial \xi}\cos\alpha\,ds\right|\right\}.$$

Wir wählen r_0 so klein, dass $\dfrac{4r_0}{\pi} = \mu_0$ einen später anzugebenden Wert nicht überschreitet, und bezeichnen den Höchstwert des Faktors von K für alle (x, y) in C''' und auf S''' mit λ. Es ist daher für alle (x, y) in C''' und auf S'''

$$(16)\quad \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| < \lambda_1 K + \mu_0 K_1$$

---

[32]) Vergl. DINI, l. c. [5]), S. 209. Herr DINI setzt $G = -\log r - g$.

und ebenso

$$\left|\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right| < \lambda_2 K + \mu_0 K_1, \qquad \left|\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right| < \lambda_3 K + \mu_0 K_1.$$

μ_0 kann beliebig klein gemacht werden.

Es sei

$$\lambda_0 = \mathrm{Max}\,(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3).$$

Wir schreiben

$$(16^a) \qquad \left\{\begin{array}{l} \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right| \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right| \\ \left|\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right| \end{array}\right\} < \lambda_0 K + \mu_0 K_1.$$

§ 3.

Diesen Hülfssatz wenden wir jetzt auf die Differentialgleichung

$$(17) \qquad \Delta u_{n+1} = F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}, \mu\right)$$

an. Hier ist zunächst

$$\begin{aligned} K &= \mathrm{Max}\left|F\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right) - F\left(x, y, z_{n-1}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}, \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}, \mu\right)\right| \\ &< A_1 . \mathrm{Max}\,|z_n - z_{n-1}| + A_2 . \mathrm{Max}\left|\frac{\partial z_n}{\partial x} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right| + A_3 . \mathrm{Max}\left|\frac{\partial z_n}{\partial y} - \frac{\partial z_{n-1}}{\partial y}\right| \\ &< (A_1 M + A_2 N + A_3 N)^{n-1} H = \alpha^{n-1} H. \end{aligned}$$

Nach (9) ist $\alpha < 1$.

Den Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (17) bezeichnen wir mit Π. Π ist eine Funktion von x und y. Ihren Differentialquotienten nach x bezeichnen wir mit $\frac{d\Pi}{dx}$. In allen Punkten im Innern von C ist $\frac{d\Pi}{dx}$ vorhanden und stetig. Für

$$F_x\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right), \qquad F_y\left(x, y, z_n, \frac{\partial z_n}{\partial x}, \frac{\partial z_n}{\partial y}, \mu\right)$$

u. s. w. schreiben wir zur Abkürzung

$$F_{x,n}, \qquad F_{y,n} \qquad \text{u. s. w.}$$

$$(18) \qquad \left\{\begin{array}{l} \frac{d\Pi}{dx} = \frac{d}{dx}[F_n - F_{n-1}] = F_{x,n} - F_{x,n-1} + F_{z,n} \cdot \frac{\partial z_n}{\partial x} - F_{z,n-1} \cdot \frac{\partial z_{n-1}}{\partial x} \\ \quad + F_{u,u} \cdot \frac{\partial^2 z_n}{\partial x^2} - F_{u,n-1} \cdot \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2} + F_{v,n} \frac{\partial^2 z_n}{\partial x\,\partial y} - F_{v,n-1} \frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x\,\partial y} \end{array}\right.$$

und daher

$$(19)\quad \begin{cases} \left|\frac{d\Pi}{dx}\right| < |F_{x,n} - F_{x,n-1}| + |F_{z,n}| \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + |F_{z,n} - F_{z,n-1}| \left|\frac{\partial z_{n-1}}{\partial x}\right| + |F_{u,n}| \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| \\ \quad + |F_{u,n} - F_{u,n-1}| \left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}\right| + |F_{v,n}| \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right| + |F_{v,n} - F_{v,n-1}| \left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|. \end{cases}$$

Wir bezeichnen den Höchstwert von $|F_z|$, $|F_u|$, $|F_v|$ für alle (x, y) in C und auf S und alle z, u, v, μ im Gebiete (3) mit E. Aus (12), (19), (9^a) ergibt sich

$$\left|\frac{d\Pi}{dx}\right| < \left\{|u_n| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|\right\}(A_4 + L' A_1 + E) + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right|$$
$$+ \left\{\left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|\right\}\left(|u_n| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial u_n}{\partial y}\right|\right) A_4,$$

oder nach (8)

$$\left|\frac{d\Pi}{dx}\right| < (M + 2N)\alpha^{n-2} H(A_4 + L' A_1 + E) + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right| + E\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right|$$
$$+ (M + 2N)\alpha^{n-2} . H . A_4\left(\left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}\right| + \left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|\right).$$

Einen ganz analogen Ausdruck erhalten wir für $\frac{d}{dy}(F_n - F_{n-1}) = \frac{d\Pi}{dy}$.

Für $\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}$ treten hierbei $\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}$, $\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}$.

Wir führen jetzt noch folgende Bezeichnungen ein:

Für $n \geqq 2$, $\quad V_n = \text{Max}\left(\left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial x \partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 u_n}{\partial y^2}\right|\right)$ im Gebiete C'',

$V_1 = \text{Max}\left(\left|\frac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}\right|, \left|\frac{\partial^2 z_1}{\partial x \partial y}\right|, \left|\frac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}\right|\right)$ im Gebiete C''.

Offenbar ist für alle (x, y) im Innern und auf dem Rande von C''

$$\left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x^2}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial x \partial y}\right|, \quad \left|\frac{\partial^2 z_{n-1}}{\partial y^2}\right| \leqq V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}.$$

Für die Grösse, die wir vorhin mit K_1 bezeichnet hatten, erhalten wir daher die Beziehung

$$(20)\quad K_1 < (M+2N)H(A_1 + L' A_4 + E)\alpha^{n-2} + 2EV_n + 2(M+2N)HA_4\alpha^{n-2}(V_1 + \cdots + V_{n-1}).$$

Die Ungleichheitsbedingungen (16^a), (17), (20) geben jetzt

$$V_{n+1} < \lambda_0 \alpha^{n-1} H + \mu_0 (M + 2N) H(A_1 + L' A_4 + E)\alpha^{n-2} + 2E\mu_0 V_n$$
$$+ \mu_0 . 2(M + 2N) H A_4 \alpha^{n-2}(V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}),$$

oder kürzer schliesslich:

$$(21)\quad V_{n+1} < \alpha^{n-2} P + \beta V_n + Q\alpha^{n-2}(V_1 + V_2 + \cdots + V_{n-1}), \qquad n \geqq 2$$

Wir wählen r_0, den Halbmesser des Kreises C', so klein, dass β, das μ_0 proportional ist, ein echter Bruch wird, und beweisen die Konvergenz der unendlichen Reihe

$$(22)\quad V_1 + V_2 + V_3 + \cdots + V_n + \cdots.$$

Diese Reihe konvergiert, wenn die unendliche Reihe

$$V_1' + V_2' + V_3' + \cdots,$$

worin

$$(23)\quad V_1' = V_1, \qquad V_2' = V_2, \qquad V_{n+1}' = \alpha^{n-2} \cdot P + \beta V_n' + Q\alpha^{n-2}(V_1' + \cdots + V_{n-1}')$$

für $n \geqq 2$ ist, konvergiert.

Wir setzen

$$t_n = \frac{V_n'}{V_1' + V_2' + \cdots + V_{n-1}'}, \qquad n \geqq 2$$

und zeigen zunächst, dass

$$\lim_{n=\infty} t_n = 0$$

ist.

Aus (23) folgt für $n \geqq 2$

$$t_{n+1} = \frac{V_{n+1}'}{V_1' + \cdots + V_n'} < \frac{V_{n+1}'}{V_1' + \cdots + V_{n-1}'} = Q\alpha^{n-2} + \frac{P\alpha^{n-2}}{V_1' + \cdots + V_{n-1}'}$$
$$+ \beta t_n < Q\alpha^{n-2} + \frac{P\alpha^{n-2}}{V_1'} + \beta t_n$$

oder, wenn für

$$Q + \frac{P}{V_1'} = Q + \frac{P}{V_1}$$

einfach R gesetzt wird,

$$(24)\quad t_{n+1} < R\alpha^{n-2} + \beta t_n,$$

daher

$$t_3 < R + \beta t_2,$$
$$t_4 < R\alpha + \beta R + \beta^2 t_2,$$
$$t_5 < R\alpha^2 + R\alpha\beta + R\beta^2 + \beta^3 t_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$t_n < R(\alpha^{n-3} + \alpha^{n-4}\beta + \cdots + \alpha\beta^{n-4} + \beta^{n-3}) + \beta^{n-2} t_2.$$

Offenbar ist

$$\lim_{n=\infty} t_n = 0.$$

Aus der Gleichung (23) und der analogen Gleichung für V_n' folgt

$$(25)\quad \left\{ \frac{V_{n+1}' - \beta V_n'}{V_n' - \beta V_{n-1}'} = \alpha \frac{P + Q(V_1' + \cdots + V_{n-1}')}{P + Q(V_1' + \cdots + V_{n-2}')} = \alpha \frac{Q + \dfrac{P}{V_1' + \cdots + V_{n-1}'}}{\dfrac{Q}{1 + t_{n-1}} + \dfrac{P}{V_1' + \cdots + V_{n-1}'}}. \right.$$

Gesetzt, die Reihe $V_1' + V_2' + \cdots$, deren Glieder positiv sind, divergiere. Aus (25) folgt alsdann

$$\lim_{n=\infty} \frac{V_{n+1}' - \beta V_n'}{V_n' - \beta V_{n-1}'} = \alpha < 1.$$

Die Reihe

$$(26)\quad (V_2' - \beta V_1') + (V_3' - \beta V_2') + \cdots$$

konvergiert. Ihre Summe sei mit S bezeichnet. Die Summe der n ersten Glieder von

(26) ist gleich

$$(1-\beta)(V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n+1})+\beta V'_{n+1}-V'_1=S-\delta_n,\quad \lim_{n=\infty}\delta_n=0.$$

Hieraus folgt

$$1-\beta+\frac{\beta V'_{n+1}-V'_1}{V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n+1}}=\frac{S-\delta_n}{V'_1+V'_2+\cdots+V'_{n+1}}$$

und für

$$n=\infty,\qquad 1-\beta=0,$$

was der Voraussetzung widerspricht.

Damit ist die Konvergenz der Reihe (22) *im Gebiete C''' bewiesen. Die Reihen*

$$(27)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}+\cdots, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial x\,\partial y}+\cdots, \\ \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2 z_1}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u_2}{\partial y^2}+\cdots \end{cases}$$

konvergieren unbedingt und in gleichem Grade in jedem ganz im Innern von C enthaltenen Gebiete $\bar{C}$.

Die Funktion

$$z=z_1+u_2+u_3+\cdots$$

genügt der Differentialgleichung

$$\Delta z=F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

§ 4.

Nachdem wir so den Existenzbeweis geführt haben, ist es nicht schwer die Betrachtungen des ersten Kapitels auf die Differentialgleichung (1) auszudehnen. Um Wiederholungen zu vermeiden, begnügen wir uns damit, die Sätze aufzuzählen. Die Beweise sind den an jener Stelle gegebenen analog.

Das Verfahren der successiven Approximationen (4) führt auch dann noch zum Ziele, wenn in den Formeln (4) die Funktion $F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \mu\right)$ entsprechend durch die Funktionen $F_1\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \mu\right)$, F_2, F_3, ... ersetzt wird. F_1, F_2, ... haben dieselben Stetigkeitseigenschaften wie die Funktion $F\left(x,\ y,\ z,\ \frac{\partial z}{\partial x},\ \frac{\partial z}{\partial y},\ \mu\right)$ und nähern sich mit wachsendem n dieser in gleichem Grade.

Sind für alle in Frage kommenden Werte der Argumente die ersten partiellen Ableitungen der Funktionen F_z, F_u, F_v, F_μ nach x, y, z, u, v vorhanden und stetig, so gilt der Satz:

Die unendlichen Reihen (10) *und* (27) *lassen sich in Bezug auf den Parameter* μ *gliedweise differentiieren. Die so entstandenen Reihen konvergieren in gleichem Grade. Die partiellen Ableitungen*

$$\frac{\partial \zeta}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mu \partial x}, \quad \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mu \partial y}, \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \mu \partial x^2}, \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \mu \partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial \mu \partial y^2}$$

sind vorhanden und stetig. Die partielle Ableitung $t = \frac{\partial \zeta}{\partial \mu}$ *genügt der Differentialgleichung*

$$\Delta t = F_\zeta . t + F_u \cdot \frac{\partial t}{\partial x} + F_v \cdot \frac{\partial t}{\partial y} + F_\mu . \tag{28}$$

Zum Beweise hat man von der Differentialgleichung (28) auszugehen und diejenige ihrer den Bedingungen (P) genügenden Lösungen T, die am Rande verschwindet, nach dem modifizierten Verfahren der successiven Approximationen darzustellen.

§ 5.

Zum Schluss wollen wir einige Sätze, welche die Eindeutigkeit der Lösungen der partiellen Differentialgleichung (1) betreffen, ableiten.

Zunächst einige bekannte Sätze aus der Theorie der Differentialgleichung

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d \frac{\partial u}{\partial x} + e \frac{\partial u}{\partial y} + f u = 0 \tag{29}$$

$a, b, \ldots, f$ seien wohl definierte, endliche Funktionen von x und y.

I) In einem Punkte, in dem $ac - b^2 > 0$, $af < 0$ ist, kann eine in diesem Punkte und in seiner Umgebung den Bedingungen (P) genügende Lösung u der Differentialgleichung (29) weder positives Maximum noch negatives Minimum haben [33]).

Im Folgenden sei in allen Punkten des untersuchten Gebietes stets

$$ac - b^2 > 0.$$

Wir betrachten jetzt in der Ebene xy ein von beliebigen Kurven S begrenztes zusammenhängendes Gebiet C, in dessen Innerem $af < 0$ ist.

II) Die Differentialgleichung (29) hat höchstens eine im Innern von C den Bedingungen (P) genügende Lösung, die auf den Randkurven eine vorgeschriebene stetige Folge von Werten annimmt [34]).

Das Vorzeichen von af sei jetzt beliebig.

III) In jedem Gebiete G, das ganz im Innern eines zur y-Achse parallelen Streifens von einer gewissen angebbaren Breite enthalten ist, kann die Differentialgleichung (29)

---

33) Vergl. A. PARAF, *Sur le problème de* DIRICHLET *et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre* [Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Bd. VI (1892), *H*, S. 1-75].

34) Vergl. A. PARAF, l. c. 33), S. 50. Herr PARAF macht die Voraussetzung, dass $a, \ldots, f$ stetig sind und stetige partielle Ableitungen erster und zweiter Ordnung haben.

nicht mehr, als *eine* im Innern dieses Gebietes den Bedingungen (*P*) genügende Lösung haben, die auf der Begrenzung eine beliebige stetige Folge von Werten annimmt [35]).

Um jeden Punkt von *C* kann man daher ein Gebiet *G* abgrenzen, in dem die Lösung der Differentialgleichung (29) eindeutig ist. Durch die Bedingung, dass das Gebiet *G* in dem Streifen *P* enthalten sein muss, ist dieses in seiner Grösse beschränkt [36]).

IV) Wie Herr PARAF gezeigt hatte, gilt der Satz II noch im vollen Umfange, wenn in dem Gebiete $C\ af \leqq 0$ ist [37]).

Wir bemerken ausdrücklich, dass in den Sätzen I bis IV die Stetigkeit der Koeffizienten $a, \ldots, f$ nicht vorausgesetzt wird.

Von der Differentialgleichung (29) gehen wir zu der allgemeinen Differentialgleichung des elliptischen Typus

$$\Delta u = F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \tag{30}$$

über.

V) *Ist in allen Punkten in C und auf S und für alle u, v, w in dem Gebiete*

$$|u| \leqq L, \qquad |v| \leqq L', \qquad |w| \leqq L' \tag{31}$$

die Funktion $F(x, y, u, v, w)$ *wohl definiert und endlich und genügt sie den beiden Ungleichheitsbedingungen*

$$|F(x, y, u_1, v_1, w_1) - F(x, y, u_2, v_2, w_2)| < \text{Const.}\{|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|\}, \tag{32}$$

$$\frac{F(x, y, u_1, v, w) - F(x, y, u_2, v, w)}{u_1 - u_2} \geqq 0, \tag{33}$$

wenn $u_1 - u_2 \neq 0$ *ist, so kann es nicht mehr als eine im Innern von C den Bedingungen (P) genügende Lösung u der Differentialgleichung (30) geben, die auf dem Rande beliebige stetige Folge von Werten annimmt, wenn überdies verlangt wird, dass* $u, \frac{\partial u}{\partial x} = v, \frac{\partial x}{\partial y} = w$ *durchweg den Ungleichheitsbedingungen (31) genügen.* Sind die Ungleichheitsbedingungen (32) und (33) für alle u, v, w erfüllt, so fällt die letzte Beschränkung fort. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ dürfen bei der Annäherung an den Rand sogar unendlich gross werden.

Sind u_1 und u_2 zwei die Forderungen der Aufgabe erfüllende Lösungen von (30), so genügt ihre Differenz

$$U = u_1 - u_2$$

---

35) Vergl. A. PARAF, l. c. 33), S. 51 und 52.

36) Der Abstand der Punkte des Gebietes *G* von den Begrenzungskurven ist kleiner als eine bestimmte angebbare Grösse. Diese hängt nur von der oberen Grenze von $\left|\frac{d}{a}\right|$ und $\left|\frac{f}{a}\right|$ in $C\ ab$.

37) Vergl. PICARD, *Traité d'Analyse*, Bd. II (1905), S. 35 und 36.

in allen Punkten im Innern von C der Differentialgleichung

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} \Delta U = {} & \frac{F\left(x, y, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}{u_1 - u_2} \cdot U \\ & + \frac{F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right)}{\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial u_2}{\partial x}} \cdot \frac{\partial U}{\partial x} \\ & + \frac{F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_1}{\partial y}\right) - F\left(x, y, u_2, \frac{\partial u_2}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial y}\right)}{\frac{\partial u_1}{\partial y} - \frac{\partial u_2}{\partial y}} \cdot \frac{\partial U}{\partial y}. \end{aligned}\right.$$

Auf dem Rande von C verschwindet U.

Die Koeffizienten von U, $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ sind der Ungleichheitsbedingung (32) zufolge in allen Punkten im Innern von C wohl definierte, endliche Funktionen von x und y. Da nach der Voraussetzung der Koeffizient von U für alle in Frage kommenden Werte von x, y, u_1, $\frac{\partial u_1}{\partial x}$, $\frac{\partial u_1}{\partial y}$, u_2 nicht negativ ist, so verschwindet nach dem Satze (IV) U identisch.

Wir bemerken, dass wir die Stetigkeit der partiellen Ableitungen bei der Annäherung an den Rand bei diesem Eindeutigkeitsbeweise nicht vorausgesetzt hatten. Wir haben nur die selbstverständliche Annahme gemacht, dass die Funktionen $\frac{\partial u}{\partial x}$ und $\frac{\partial u}{\partial y}$ auch bei der Annäherung an den Rand das Gebiet, in dem die Funktion

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

definiert war, nicht verlassen.

Der Satz V bildet eine Verallgemeinerung eines Satzes von Herrn Ed. Le Roy. Herr Le Roy beweist für die partielle Differentialgleichung

$$\Delta V = F\left(x, y, z, V, \frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$$

die Eindeutigkeit der Lösung, wenn für alle in Betracht kommenden Werte der in F vorkommenden Variabeln:

$$F_v > 0$$

ist [38]).

---

[38]) Éd. Le Roy, *Sur l'intégration des équations de la chaleur* [Annales scientifiques de l'École Normale supérieure, Ser. III, Bd. XIV (1897), S. 379-465]. Vergl. auch Picard, l. c. [2]) *a*, S. 173.

Wir machen jetzt über das Vorzeichen des Differenzenquotienten

$$\frac{F(x, y, u_1, v, w) - F(x, y, u_2, v, w)}{u_1 - u_2} \quad \text{für} \quad u_1 - u_2 \neq 0$$

keine Voraussetzungen mehr.

VI) *Ist in allen Punkten im Innern und auf dem Rande von C und für alle u, v, w in dem Gebiete*

(31) $$|u| \leq L, \qquad |v| \leq L', \qquad |w| \leq L'$$

die Funktion F wohl definiert und endlich, genügt sie ferner der Ungleichheitsbedingung

(35) $$|F(x, y, u_1, v_1, w_1) - F(x, y, u_2, v_2, w_2)| < B\{|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2| + |w_1 - w_2|\},$$

so lässt sich um jeden Punkt von C ein Gebiet D abgrenzen, sodass es für jedes ganz in D gelegene Gebiet G nicht mehr als eine im Innern von G den Bedingungen (P) genügende Lösung von (30) geben kann, die auf dem Rande eine beliebige stetige Wertfolge annimmt, wenn überdies verlangt wird, dass u, $\frac{\partial u}{\partial x} = v$, $\frac{\partial u}{\partial y} = w$ *durchweg die Ungleichheitsbedingungen (31) erfüllen.* Zum Beweise genügt es, den Satz III auf die Differentialgleichung (34) anzuwenden und die Fussnote [36]) zu beachten. Die auf der rechten Seite der Gleichung (34) vorkommenden Differenzenquotienten sind dem absoluten Betrage nach kleiner als die feste Zahl B. Dieses folgt zum Beispiel für den ersten Differenzenquotienten, wenn $u_1 - u_2 \neq 0$ ist, aus (35). Ist aber $u_1 - u_2 = 0$, so setzen wir ausdrücklich für den Koeffizienten von U eine Zahl kleiner als B.

Wir betrachten zum Schluss die allgemeine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung

(36) $$\Phi\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = 0.$$

$$\Phi(x, y, u, v, w, r, s, t)$$

ist für alle Werte von x und y im Innern und am Rande von C und für alle u, v, w, r, s, t, die den Ungleichheitsbedingungen

(37) $$|u| \leq L, \qquad |v| \leq L', \qquad |w| \leq L', \qquad |r| \leq L'', \qquad |s| \leq L'', \qquad |t| \leq L''$$

genügen, eine stetige Funktion ihrer 8 Argumente. In dem bezeichneten Gebiete existieren die partiellen Ableitungen Φ_r, Φ_s, Φ_t und verhalten sich stetig. Ueberdies erfüllt Φ folgende zwei Ungleichheitsbedingungen:

(38) $$4\Phi_r\Phi_t - (\Phi_s)^2 > 0,$$

(39) $$\begin{cases} |\Phi(x, y, u, v, w, r, s, t) - \Phi(x, y, u', v', w', r', s', t')| \\ < \text{Const.}\{|u - u'| + |v - v'| + |w - w'| + |r - r'| + |s - s'| + |t - t'|\}. \end{cases}$$

Alsdann gilt der Satz:

VII) *Um jeden Punkt von C lässt sich ein Gebiet D abgrenzen, sodass es für jedes ganz in D enthaltene Gebiet G nicht mehr als eine in S den Bedingungen (P) genügende Lösung u der Differentialgleichung (36) geben kann, die auf dem Rande von G beliebige*

stetige Wertfolge annimmt, wenn überdies verlangt wird, dass $u, \frac{\partial u}{\partial x}, \ldots, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ *durchweg die Ungleichheitsbedingungen* (37) *erfüllen.*

Der Beweis ist dem Beweise der Sätze V und VI ganz analog.

Ist der Quotient $\frac{\Phi_u}{\Phi_r}$ in dem betrachteten Gebiete positiv oder Null, so ist die Beschränkung auf ein Gebiet von hinreichend kleinen Abmessungen [39]) überflüssig.

Charlottenburg, 15 Mai 1908.

LEON LICHTENSTEIN.

[39]) Vergl. die Fussnote [36]).

Lebenslauf.

Ich, Leon Lichtenstein, geboren am 16. Mai 1878 zu Warschau in Russ-Polen, mosaischer Konfession, erhielt die Schulbildung in meiner Vaterstadt. Mit dem Reifezeugnis der Realschule bezog ich Michaelis 1894 die Technische Hochschule in Charlottenburg und erhielt nach abgelegter Diplomprüfung im Sommer 1901 den Grad eines Maschineningenieurs.

Die nächsten zwei Semester studierte ich Elektrotechnik und widmete mich seitdem mathematischen und naturwissenschaftlichen Studien, seit Michaelis 1905 an der Friedrich-Wilhelms-Universität zu Berlin. Im März 1907 legte ich an der Friedrich-Werder'schen Oberrealschule zu Berlin die Abiturientenprüfung ab und erhielt bald darauf von der Technischen Hochschule zu Charlottenburg für eine Arbeit: « Zur Theorie der elektrischen Kabel » die Würde eines Doktor-Ingenieurs.

Während meiner Studien hörte ich Vorlesungen der Herren Professoren und Dozenten:

In Charlottenburg: Lampe, Hettner, Steinitz, Hertzer (†), Jolles, Paalzow (†), Rubens, Rüdorff (†), Grübler, Slaby, Riedler, Stumpf, Kammerer, Reichel, Josse, Wedding (†), Hartmann, Ludwig, Hermann, Krüger;

In Berlin: Schwarz, Frobenius, Schottky, Knoblauch, Landau, Schur, Planck, Förster, Dessoir.

Seit meinem ersten Semester beteiligte ich mich an den Übungen des mathematischen Seminars und an den von Herrn Prof. Schwarz geleiteten mathematischen Colloquien.

Allen meinen hochverehrten Lehrern, besonders den Herren Professoren Schwarz, Frobenius, Schottky, Landau spreche ich meinen wärmsten Dank aus. Herrn Geheimrat Schwarz, dem ich die entscheidenden Anregungen im wissenschaftlichen Studium verdanke, fühle ich mich für immer zum ehrerbietigsten Dank verpflichtet.